Wykład 1. Elementy logiki i rachunku zbiorów

Język matematyki, liczby rzeczywiste

I. Rachunek zdań. Pojęcie zdania, wartości logicznych i pojęcie tautologii.

Przykłady zdań:

- p="suma kątów w trójkącie jest równa 180°"
- q ="$2+2=5$"
- r ="$2+2=4$"
- s ="$2+2\neq 5$"

Operacje na zdaniach

- $\neg p$ (negacja)
- $p \vee q$ (alternatywa)
- $p \wedge q$ (koniunkcja)
- $p \Rightarrow q$ (implikacja)
- $p \Leftrightarrow q$ (równoważność)

Wartość logiczna zdania:

jeżeli zdanie p jest prawdziwe, to przypisujemy mu wartość logiczną 1,
jeżeli zdanie p jest fałszywe, to przypisujemy mu wartość logiczną 0,

Wyznaczanie wartości logicznej zdań złożonych.

Przykład dla alternatywy, koniunkcji, implikacji oraz równoważności:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Def. Tautologia: zdanie złożone, którego wartość logiczna jest równa 1 bez względu na to jakiej wartości logicznej są jego składniki. Symbol $\models$ oznacza, że zdanie występujące po nim jest tautologią. Przykłady:

- $\models \neg p \vee p$
- $\models p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ (prawo eliminacji implikacji)
- $\models \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ (prawo de Morgana)
- $\models \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ (prawo de Morgana)

2. Def. Funkcją zdaniową (formułą zdaniową) $\psi(x)$ na zbiorze Ω nazywamy dowolne wyrażenie, które staje się zdaniem w sensie logiki dla każdego $x \in \Omega$.

   Przykład
   $\psi(x) = x^2 + 5 < 8$, $x \in \Omega = \mathbb{R}$
   dla każdego wybranego x, $\psi(x)$ staje się zdaniem logicznym; dla jednych argumentów x jest to zdanie prawdziwe, dla innych jest to zdanie fałszywe.

   Przykład
   $\psi(x, y) = x < y$, $x, y \in \Omega = \mathbb{R}$
   formuła zdaniowa może być funkcją jednego, dwóch lub większej liczby argumentów.

3. Kwantyfikatory

   - kwantyfikator ogólny: $\bigwedge\limits_x \phi(x)$, czytamy "dla każdego x zachodzi (prawdziwe jest zdanie) $\phi(x)$"

     Przykład

     $\bigwedge\limits_x x^2 \geq 0$ - zdanie prawdziwe,

     $\bigwedge\limits_x x^2 + x \geq 0$ - zdanie fałszywe, (rozpatrz np. $x = -0.5$)

   - kwantyfikator szczególny: $\bigvee\limits_x \phi(x)$, czytamy "istnieje taki x, że zachodzi (jest prawdziwe) zdanie $\phi(x)$"

     Przykład

     $\bigwedge\limits_x x^2 \geq 0$ - zdanie prawdziwe,

$\bigwedge\limits_x x^2 + x < -1$ - zdanie fałszywe,

4. negacja wyrażenia logicznego z kwantyfikatorem

$$\neg\left(\bigwedge_x \phi(x)\right) \Leftrightarrow \bigvee_x \neg\phi(x)$$

$$\neg\left(\bigvee_x \phi(x)\right) \Leftrightarrow \bigwedge_x \neg\phi(x)$$

Przykład

$\neg\left(\bigwedge\limits_x x^2 + x < -1\right) \Leftrightarrow \bigvee\limits_x x^2 + x \geq -1$ ostatnie zdanie jest prawdziwe

5. zasady stosowania kwantyfikatorów w przypadku funkcji zdaniowych ϕ dwóch lub większej liczby argumentów

   - $\bigwedge\limits_x \bigwedge\limits_y \phi(x,y) \Leftrightarrow \bigwedge\limits_y \bigwedge\limits_x \phi(x,y)$

     $\bigvee\limits_x \bigvee\limits_y \phi(x,y) \Leftrightarrow \bigvee\limits_y \bigvee\limits_x \phi(x,y)$

     (zmiana kolejności kwantyfikatorów tego samego rodzaju nie zmienia wartości logicznej wyniku)
   - zdania $\bigwedge\limits_x \bigvee\limits_y \phi(x,y)$ i $\bigvee\limits_y \bigwedge\limits_x \phi(x,y)$ mogą mieć różne wartosci logiczne (zmiana kolejności kwantyfikatorów różnych rodzajów może zmienić wartość logiczną wyniku)

     Przykład

     zdanie $\bigwedge\limits_x \bigvee\limits_y x < y$ jest prawdziwe, a

     zdanie $\bigvee\limits_y \bigwedge\limits_x x < y$ jest fałszywe, x, y są liczbami rzeczywistymi.

Dowód indukcyjny.

Metoda dowodu prawdziwości ciągu zdań $T(n_0), T(n_0+1), T(n_0+2), \ldots$.

1. Dowodzimy prawdziwości zdania $T(n_0)$

2. Dowodzimy prawdziwości implikacji $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ dla wszystkich $n \geq n_0$

3. Jako wniosek, na mocy zasady indukcji otrzymujemy prawdziwość każdego zdania $T(n)$ dla $n \geq n_0$.

Przykład. Nierówność Bernoulliego

$$\bigwedge_{x \geq -1} \bigwedge_{n} (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Dowód.

1. Dla $n = 1 : L = (1+x)^1 = 1 + x$, $P = 1 + nx = 1 + x$, stąd $L = P$

2. Niech $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Wtedy

$$L = (1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \overset{1}{\geq} (1+nx)(1+x) \geq$$
$$1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x = P$$

$\overset{1}{\geq}$: skorzystaliśmy z założenia indukcyjnego i z faktu, że $1 + x \geq 0$.

Rachunek zbiorów.

Naukę o zbiorach nazywamy teorią mnogości. Metodą badania zbiorów jest metoda aksjomatyczna. Podobnie jak w geometrii nie odpowiadamy wprost na pytanie czym są punkty, proste i płaszczyzny i inne terminy "pierwotne" geometrii, lecz z pewnego układu aksjomatów (pewników) wyprowadzamy wszystkie twierdzenia geometrii bez odwoływania się do intuicyjnego znaczenia terminów pierwotnych - tak samo i teorię mnogości opiera się na kilku podstawowych aksjomatach, z których na drodze dedukcji otrzymuje się wszystkie inne twierdzenia. W aksjomatach teorii mnogości występuje pojęcie zbioru i ściśle z nim związane pojęcie stosunku przynależności elementu do zbioru,

np. zapis $x \in A$ czytamy "x jest elementem zbioru A" lub "x należy do zbioru A".
zapis $\neg(x \in A)$ czytamy "x nie jest elementem zbioru A" lub "x nie należy do zbioru A", stosujemy również uproszczony zapis $x \notin A$.

Podstawowe fakty z rachunku zbiorów:

1. Aksjomat ekstensjonalności (równości): zbiory A, B są równe ($A = B$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigwedge\limits_x [x \in A \Leftrightarrow x \in B]$

2. Suma zbiorów $A \cup B$
$\bigwedge\limits_x [x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)]$

3. Iloczyn (przekrój) zbiorów $A \cap B$
$\bigwedge\limits_x [x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)]$

4. Różnica zbiorów $A \backslash B$
$\bigwedge\limits_x [x \in A \backslash B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)]$

4a. Różnica symetryczna zbiorów
$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

5. Dopełnienie zbioru A: $A^c = \Omega \backslash A$ (zawsze musimy wiedzieć, co jest naszą przestrzenią Ω).

Własności działań na zbiorach

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3. $A \cap B = B \cap A$
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Przykład. Określenie podzbioru.
Mówimy, że zbiór A jest podzbiorem zbioru B i piszemy $A \subset B$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_x (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$$

Przykład. Określenie zbioru pustego.
Niech A będzie dowolnym zbiorem. Określamy zbiór pusty $\emptyset$ następująco

$$\emptyset = A \backslash A,$$

czyli

$$\bigwedge_x [x \in \emptyset \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin A)]$$

Ponieważ zdanie $(x \in A) \wedge (x \notin A)$ jest zawsze fałszywe, również zawsze fałszywym jest zdanie $x \in \emptyset$, co oznacza, że żaden x nie jest elementem zbioru pustego.

Twierdzenie 1. Istnieje dokładnie jeden zbiór pusty $\emptyset$.

Dowód. Niech A i B będą dowolnie wybranymi zbiorami. Stosując konstrukcję zbioru pustego otrzymujemy

$$\emptyset_1 = A \backslash A, \quad \emptyset_2 = B \backslash B.$$

Ponieważ zawsze fałszywymi są zdania $x \in \emptyset_1$ i $x \in \emptyset_2$, prawdziwą jest równoważność

$$\bigwedge_x (x \in \emptyset_1) \Leftrightarrow (x \in \emptyset_2),$$

co na podstawie aksjomatu równości (ekstensjonalności) oznacza, że

$$\emptyset_1 = \emptyset_2.$$

Podstawowy sposób określenia zbioru:

$$A = \{x \in \Omega : \phi(x)\}$$

czytamy następująco: A jest zbiorem tych elementów x (zawsze musimy wiedzieć, co jest naszą przestrzenią Ω), dla których funkcja zdaniowa $\phi(x)$ staje się zdaniem prawdziwym.

Przykład.
przedział $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$.

Przykład.
zbiór $A = \{x, y \in \mathbb{R} : 0 < y < -x^2 + 4, \quad -2 < x < 2\}$.

Zbiór liczb rzeczywistych

Działania arytmetyczne: $+, \cdot, (-, :)$, relacja porządku $<$. Podstawowe własności (aksjomaty) działań arytmetycznych i relacji porządku:

1. $(\bigwedge x, y, z \in \mathbb{R})\, (x + y) + z = x + (y + z)$ (łączność dodawania)

2. $(\bigvee 0 \in \mathbb{R})(\bigwedge x \in \mathbb{R})\,(x + 0 = x)$ (element neutralny dodawania (zero))
3. $(\bigwedge x \in \mathbb{R})(\bigvee -x \in \mathbb{R})\, x + (-x) = 0$ (element przeciwny dodawania)
4. $(\bigwedge x, y \in \mathbb{R})\, x + y = y + x$ (przemienność dodawania)
5. $(\bigwedge x, y, z \in \mathbb{R})\,(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (łączność mnożenia)
6. $(\bigvee 1 \in \mathbb{R})(\bigwedge x \in \mathbb{R})\ (x \cdot 1 = x)$ (element neutralny mnożenia (jedność))
7. $(\bigwedge x \neq 0 \in \mathbb{R})(\bigvee x^{-1} \in \mathbb{R})\, x \cdot x^{-1} = 1$ (element odwrotny mnożenia)
8. $(\bigwedge x, y \in \mathbb{R})\, x \cdot y = y \cdot x$ (przemienność mnożenia)
9. $(\bigwedge x, y, z \in \mathbb{R})\, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (rozdzielność mnożenia względem dodawania)
10. $(\bigwedge x, y, z \in \mathbb{R})$ (jeśli $x < y$ i $y < z$, to $x < z$)
11. $(\bigwedge x, y \in \mathbb{R})$ ($x < y$ albo $x = y$ albo $y < x$)
12. $(\bigwedge x, y, z \in \mathbb{R})$ (jeśli $x < y$, to $x + z < y + z$)
13. $(\bigwedge x, y \in \mathbb{R})(\bigwedge z > 0 \in \mathbb{R})$ (jeśli $x < y$, to $x \cdot z < y \cdot z$)

Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem niepustym i ograniczonym, tzn. istnieją liczby m i M takie, że

$$m \leq a \leq M, \bigwedge a \in A$$

Określamy pomocnicze zbiory:

$$\hat{A} = \{\hat{a} :\ a \leq \hat{a}, \bigwedge a \in A\}$$
$$\check{A} = \{\check{a} :\ a \geq \check{a}, \bigwedge a \in A\}$$

14. **Zasada zupełności:**

W zbiorze $\check{A}$ istnieje element największy $\max \check{A}$, spełnia on nierówność $a \geq \max \check{A}$, $\bigwedge a \in A$ i nazywany jest kresem dolnym zbioru A, piszemy $\inf A = \max \check{A}$.
W zbiorze $\hat{A}$ istnieje element najmniejszy $\min \hat{A}$, spełnia on nierówność $a \leq \min \hat{A}$, $\bigwedge a \in A$ i nazywany jest kresem górnym zbioru A, piszemy $\sup A = \min \hat{A}$.

Podsumowując

Każdy ograniczony, niepusty podzbiór $\mathbb{R}$ ma kres dolny i górny.

Uzupełnienia

- Zbiór liczb rzeczywistych rozszerzony: $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Własności symboli $-\infty$ i ∞.
  - $(\bigwedge x \in \mathbb{R})\ -\infty < x < \infty$
  - Działanie dodawania

$+$	$-\infty$	$x \in \mathbb{R}$	∞
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	nieokreślone
$y \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x+y$	∞
∞	nieokreślone	∞	∞

  - Działanie mnożenia

$\cdot$	$-\infty$	$x<0$	$x=0$	$x>0$	∞
$-\infty$	∞	∞	nieokreślone	$-\infty$	$-\infty$
$y<0$	∞	$x \cdot y$	$x \cdot y$	$x \cdot y$	$-\infty$
$y=0$	nieokreślone	0	0	0	nieokreślone
$y>0$	$-\infty$	$x \cdot y$	$x \cdot y$	$x \cdot y$	∞
∞	$-\infty$	$-\infty$	nieokreślone	∞	∞

- Podstawowe własności:
  - $(x+y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$,
  - $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$,
  - $(x+y)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y^2 + y^3$,
- liczba $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

  Uzasadnienie. Dowód nie wprost (a.c.). Zakładamy przeciwnie, że liczba $\sqrt{2}$ jest wymierna, tzn. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ dla pewnych liczb naturalnych p, q. Stąd wynika, że

  $$2q^2 = p^2$$

  Zauważmy, że w rozwinięciu liczby p na iloczyn liczb pierwszych musi wystąpić liczba 2, powiedzmy n razy. Stąd po prawej stronie równości

liczba 2 występuje $2n$ razy, czyli parzystą liczbę razy. Natomiast po lewej stronie równości liczba 2 występuje nieparzystą liczbę razy. Uzyskana sprzeczność dowodzi, prawdziwości naszej tezy.

Uwaga. Dowód nie wprost twierdzenia $p \Rightarrow q$.

W tej metodzie zamiast oryginalnego twierdzenia dowodzimy prawdziwości twierdzenia $\neg q \Rightarrow \neg p$. Poprawność takiej metody jest widoczna z porównania dwóch tautologii:

1. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
2. $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow (q \vee \neg p)$

- Funkcja kwadratowa:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

- Nierówność Cauchy'ego (-Schwarza-Buniakowskiego): Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ zachodzi nierówność

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

Dowód: Rozważamy funkcję

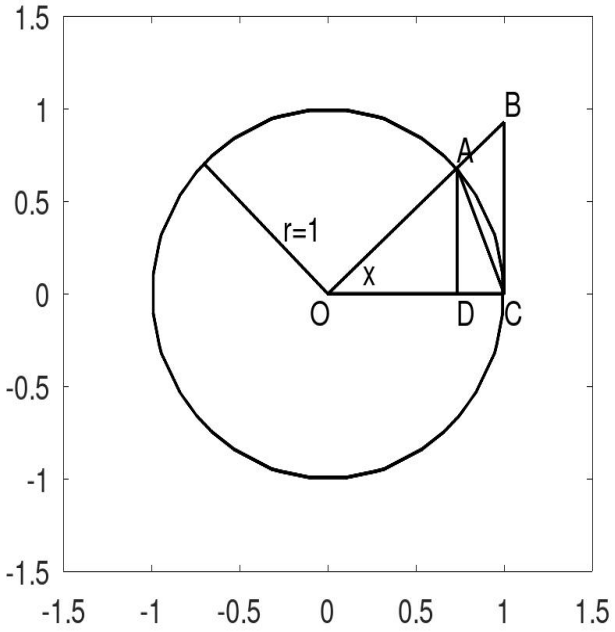
$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (|a_k| - |b_k| \cdot x)^2 = ax^2 + bx + c,$$

gdzie $a = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2$, $b = -2\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k b_k|$ i $c = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2$. Funkcja kwadratowa $f(x)$ przyjmuje tylko wartości nieujemne, $(\bigwedge x)(f(x) \geq 0)$. Stąd wnioskujemy, że wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$, wyliczamy Δ, upraszczamy i otrzymujemy żądaną nierówność.

Uwaga. Równość w powyższej nierówności ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\lambda \in \mathbb{R}$ takie, że $|a_i| = \lambda |b_i|$ dla $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Dla uzasadnienia tego faktu zauważmy, że równość w nierówności Cauchy'ego oznacza, że $\Delta = 0$, czyli funkcja kwadratowa $f(x)$ ma miejsce zerowe λ, $f(\lambda) = 0$. To z kolei oznacza, że każdy składnik sumy $|a_i| - \lambda |b_i| = 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, co należało udowodnić.

- Nierównośc trygonometryczna. Dla $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ zachodzi

$$0 \leq \sin x \leq x \leq \mathrm{tg} x$$



Uzasadnienie. Niech S_1 oznacza pole trójkąta OAC, S_2 oznacza pole wycinka koła OAC i S_3 oznacza pole trójkąta OBC. Zauważamy, że

$$AD = \sin x,\ BC = \mathrm{tg}\, x,\ OC = 1,$$
$$S_1 = \frac{1}{2} OC \cdot AD = \frac{1}{2} \sin x,\ S_2 = \frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{1}{2} x,$$
$$S_3 = \frac{1}{2} OC \cdot BC = \frac{1}{2} \mathrm{tg}\, x$$

Żądana nierówność wynika natychmiast z faktu, że $S_1 \leq S_2 \leq S_3$.