Wykład 2. Rachunek zbiorów cd., zbiory liczbowe

Rachunek zbiorów.

Naukę o zbiorach nazywamy teorią mnogości. Metodą badania zbiorów jest metoda aksjomatyczna. Podobnie jak w geometrii nie odpowiadamy wprost na pytanie czym są punkty, proste i płaszczyzny i inne terminy "pierwotne" geometrii, lecz z pewnego układu aksjomatów (pewników) wyprowadzamy wszystkie twierdzenia geometrii bez odwoływania się do intuicyjnego znaczenia terminów pierwotnych - tak samo i teorię mnogości opiera się na kilku podstawowych aksjomatach, z których na drodze dedukcji otrzymuje się wszystkie inne twierdzenia. W aksjomatach teorii mnogości występuje pojęcie zbioru i ściśle z nim związane pojęcie stosunku przynależności elementu do zbioru,

np. zapis $x \in A$ czytamy "x jest elementem zbioru A" lub "x należy do zbioru A".
zapis $\neg(x \in A)$ czytamy "x nie jest elementem zbioru A" lub "x nie należy do zbioru A", stosujemy również uproszczony zapis $x \notin A$.

Podstawowe fakty z rachunku zbiorów:

1. Aksjomat ekstensjonalności (równości): zbiory A, B są równe ($A = B$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigwedge\limits_x [x \in A \Leftrightarrow x \in B]$

2. Suma zbiorów $A \cup B$
   $\bigwedge\limits_x [x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)]$

3. Iloczyn (przekrój) zbiorów $A \cap B$
   $\bigwedge\limits_x [x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)]$

4. Różnica zbiorów $A \backslash B$
   $\bigwedge\limits_x [x \in A \backslash B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)]$

4a. Różnica symetryczna zbiorów
   $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

5. Dopełnienie zbioru A: $A^c = \Omega \backslash A$ (zawsze musimy wiedzieć, co jest naszą przestrzenią Ω).

Własności działań na zbiorach

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3. $A \cap B = B \cap A$
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Przykład. Określenie podzbioru.
Mówimy, że zbiór A jest podzbiorem zbioru B i piszemy $A \subset B$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_x (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$$

Przykład. Określenie zbioru pustego.
Niech A będzie dowolnym zbiorem. Określamy zbiór pusty $\emptyset$ następująco

$$\emptyset = A \backslash A,$$

czyli

$$\bigwedge_x [x \in \emptyset \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin A)]$$

Ponieważ zdanie $(x \in A) \wedge (x \notin A)$ jest zawsze fałszywe, również zawsze fałszywym jest zdanie $x \in \emptyset$, co oznacza, że żaden x nie jest elementem zbioru pustego.

Twierdzenie 1. Istnieje dokładnie jeden zbiór pusty $\emptyset$.

Dowód. Niech A i B będą dowolnie wybranymi zbiorami. Stosując konstrukcję zbioru pustego otrzymujemy

$$\emptyset_1 = A \backslash A, \quad \emptyset_2 = B \backslash B.$$

Ponieważ zawsze fałszywymi są zdania $x \in \emptyset_1$ i $x \in \emptyset_2$, prawdziwą jest równoważność

$$\bigwedge_x (x \in \emptyset_1) \Leftrightarrow (x \in \emptyset_2),$$

co na podstawie aksjomatu równości (ekstensjonalności) oznacza, że

$$\emptyset_1 = \emptyset_2.$$

Podstawowy sposób określenia zbioru:

$$A = \{x \in \Omega : \phi(x)\}$$

czytamy następująco: A jest zbiorem tych elementów x (zawsze musimy wiedzieć, co jest naszą przestrzenią Ω), dla których funkcja zdaniowa $\phi(x)$ staje się zdaniem prawdziwym.

Przykład.
przedział $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$.

Przykład.
zbiór $A = \{x, y \in \mathbb{R} : 0 < y < -x^2 + 4, \quad -2 < x < 2\}$.

Zbiór liczb rzeczywistych

Działania arytmetyczne: $+, \cdot, (-, :)$, relacja porządku $<$. Podstawowe własności (aksjomaty) działań arytmetycznych i relacji porządku:

1. $(\bigwedge x, y, z \in \mathbb{R})\,(x + y) + z = x + (y + z)$ (łączność dodawania)
2. $(\bigvee 0 \in \mathbb{R})(\bigwedge x \in \mathbb{R})\,(x + 0 = x)$ (element neutralny dodawania (zero))
3. $(\bigwedge x \in \mathbb{R})(\bigvee -x \in \mathbb{R})\, x + (-x) = 0$ (element przeciwny dodawania)
4. $(\bigwedge x, y \in \mathbb{R})\, x + y = y + x$ (przemienność dodawania)
5. $(\bigwedge x, y, z \in \mathbb{R})\,(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (łączność mnożenia)
6. $(\bigvee 1 \in \mathbb{R})(\bigwedge x \in \mathbb{R})\ (x \cdot 1 = x)$ (element neutralny mnożenia (jedność))
7. $(\bigwedge x \neq 0 \in \mathbb{R})(\bigvee x^{-1} \in \mathbb{R})\ x \cdot x^{-1} = 1$ (element odwrotny mnożenia)
8. $(\bigwedge x, y \in \mathbb{R})\ x \cdot y = y \cdot x$ (przemienność mnożenia)
9. $(\bigwedge x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (rozdzielność mnożenia względem dodawania)
10. $(\bigwedge x, y, z \in \mathbb{R})$ (jeśli $x < y$ i $y < z$, to $x < z$)
11. $(\bigwedge x, y \in \mathbb{R})$ ($x < y$ albo $x = y$ albo $y < x$)

12. $(\bigwedge x, y, z \in \mathbb{R})$ (jeśli $x < y$, to $x + z < y + z$)

13. $(\bigwedge x, y \in \mathbb{R})(\bigwedge z > 0 \in \mathbb{R})$ (jeśli $x < y$, to $x \cdot z < y \cdot z$)

Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem niepustym i ograniczonym, tzn. istnieją liczby m i M takie, że

$$m \leq a \leq M, \bigwedge a \in A$$

Określamy pomocnicze zbiory:

$$\hat{A} = \{\hat{a} : \ a \leq \hat{a}, \bigwedge a \in A\}$$
$$\check{A} = \{\check{a} : \ a \geq \check{a}, \bigwedge a \in A\}$$

14. **Zasada zupełności:**

W zbiorze $\check{A}$ istnieje element największy $\max \check{A}$, spełnia on nierówność $a \geq \max \check{A}$, $\bigwedge a \in A$ i nazywany jest kresem dolnym zbioru A, piszemy $\inf A = \max \check{A}$.
W zbiorze $\hat{A}$ istnieje element najmniejszy $\min \hat{A}$, spełnia on nierówność $a \leq \min \hat{A}$, $\bigwedge a \in A$ i nazywany jest kresem górnym zbioru A, piszemy $\sup A = \min \hat{A}$.

Podsumowując

Każdy ograniczony, niepusty podzbiór $\mathbb{R}$ ma kres dolny i górny.

Uzupełnienia

- Zbiór liczb rzeczywistych rozszerzony: $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Własności symboli $-\infty$ i ∞.
  - $(\bigwedge x \in \mathbb{R}) \ -\infty < x < \infty$
  - Działanie dodawania

$+$	$-\infty$	$x \in \mathbb{R}$	∞
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	nieokreślone
$y \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x + y$	∞
∞	nieokreślone	∞	∞

- Działanie mnożenia

$\cdot$	$-\infty$	$x<0$	$x=0$	$x>0$	∞
$-\infty$	∞	∞	nieokreślone	$-\infty$	$-\infty$
$y<0$	∞	$x\cdot y$	$x\cdot y$	$x\cdot y$	$-\infty$
$y=0$	nieokreślone	0	0	0	nieokreślone
$y>0$	$-\infty$	$x\cdot y$	$x\cdot y$	$x\cdot y$	∞
∞	$-\infty$	$-\infty$	nieokreślone	∞	∞

- Podstawowe własności:
  - $(x+y)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot y + y^2$,
  - $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$,
  - $(x+y)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot y + 3\cdot x\cdot y^2 + y^3$,

- liczba $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

  Uzasadnienie. Dowód nie wprost (a.c.). Zakładamy przeciwnie, że liczba $\sqrt{2}$ jest wymierna, tzn. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ dla pewnych liczb naturalnych p, q. Stąd wynika, że

  $$2q^2 = p^2$$

  Zauważmy, że w rozwinięciu liczby p na iloczyn liczb pierwszych musi wystąpić liczba 2, powiedzmy n razy. Stąd po prawej stronie równości liczba 2 występuje $2n$ razy, czyli parzystą liczbę razy. Natomiast po lewej stronie równości liczba 2 występuje nieparzystą liczbę razy. Uzyskana sprzeczność dowodzi, prawdziwości naszej tezy.

  Uwaga. Dowód nie wprost twierdzenia $p \Rightarrow q$.

  W tej metodzie zamiast oryginalnego twierdzenia dowodzimy prawdziwości twierdzenia $\neg q \Rightarrow \neg p$. Poprawność takiej metody jest widoczna z porównania dwóch tautologii:

  1. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
  2. $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow (q \vee \neg p)$

- Funkcja kwadratowa:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

- Nierówność Cauchy'ego (-Schwarza-Buniakowskiego): Dla dowolnych liczb rzeczywistych a_1, a_2,...,a_n, b_1, b_2,...,b_n zachodzi nierówność

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

Dowód: Rozważamy funkcję

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (|a_k| - |b_k| \cdot x)^2 = ax^2 + bx + c,$$

gdzie $a = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$, $b = -2\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|$ i $c = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$. Funkcja kwadratowa $f(x)$ przyjmuje tylko wartości nieujemne, $(\bigwedge x)(f(x) \geq 0)$. Stąd wnioskujemy, że wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$, wyliczamy Δ, upraszczamy i otrzymujemy żądaną nierówność.

Uwaga. Równość w powyższej nierówności ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\lambda \in \mathbb{R}$ takie, że $|a_i| = \lambda |b_i|$ dla $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Dla uzasadnienia tego faktu zauważmy, że równość w nierówności Cauchy'ego oznacza, że $\Delta = 0$, czyli funkcja kwadratowa $f(x)$ ma miejsce zerowe λ, $f(\lambda) = 0$. To z kolei oznacza, że każdy składnik sumy $|a_i| - \lambda |b_i| = 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, co należało udowodnić.