Ważne nierówności

1. Dla wartosci bezwzględnej

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{jeśli } a \geq 0 \\ -a, & \text{jeśli } a < 0. \end{cases}$$

Własności

- Jeśli $a \leq |b|$ i $-a \leq |b|$, to $|a| \leq |b|$.
Uzasadnienie a. przypadek $a \geq 0$: $|a| = a \leq |b|$
b. przypadek $a < 0$: $|a| = -a \leq |b|$
w obu przypadkach żądana nierówność jest prawdziwa.

- $\bigwedge\limits_{x,y} |x + y| \leq |x| + |y|$

Uzasadnienie

$$\begin{array}{ll} x \leq |x|,\ y \leq |y| & -x \leq |x|,\ -y \leq |y| \\ x + y \leq |x| + |y| & -(x + y) \leq |x| + |y| \end{array}$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

- $\bigwedge\limits_{x,y} ||x| - |y|| \leq |x - y|$

Uzasadnienie

$$\begin{array}{ll} |x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|, & \text{zamiana } x \text{ na } y \\ |x| - |y| \leq |x - y| & |y| - |x| \leq |x - y| \end{array}$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

2. Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Uzasadnienie

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - |xy| = \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2) - |xy| = \frac{1}{2}(|x| - |y|)^2 \geq 0.$$

3. **Nierówność Bernoulliego**

$$\bigwedge_{x\geq -1}\ \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} (1+x)^n \geq 1+nx$$

Uzasadnienie

- dla $n=1: L=(1+x)^1=1+x$, $P=1+x$, czyli $L=P$
- zakładamy, że nierówność jest prawdziwa dla n;
rozważamy nierówność dla $n+1$: na początku zauważamy, że

$$L=(1+x)^{n+1}=(1+x)(1+x)^n$$

Ponieważ $1+x\geq 0$, z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)=1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x=P$$

W ten sposób $L\geq P$, więc na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność jest prawdziwa dla wszystkich $n\in\mathbb{N}$.

4. **Nierówności dla funkcji trygonometrycznych**

(*) $\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$

dla $0\leq x<\frac{\pi}{2}$. Uzasadnienie:

pole $\Delta OAB=\frac{1}{2}OA\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x=\frac{\sin x}{2}$

pole wycinka koła $OAB=\frac{x}{2\pi}\cdot\pi\cdot 1^2=\frac{x}{2}$

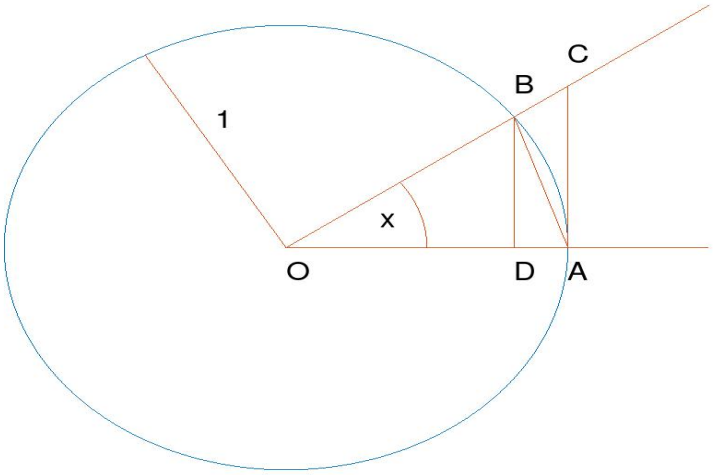
pole $\Delta OAC=\frac{1}{2}OA\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{tg} x}{2}$

Ponieważ

pole $\Delta OAB\leq$ pole wycinka koła $OAB\leq$ pole ΔOAC,

zachodzą nierówności

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$$



5. **Nierówność Cauchy'ego (-Schwarza-Buniakowskiego**

Dla dowolnych liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i $y_1, y_2, \ldots, y_n$ zachodzi

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}$$

Równość w tej nierówności ma miejsce tylko wtedy, gdy istnieje liczba $\lambda \in \mathbb{R}$ taka, że $x_1 = \lambda y_1$, $x_2 = \lambda y_2$, $\ldots$, $x_n = \lambda y_n$,

Uzasadnienie.

Rozpatrujemy funkcję
$f(z) = (x_1 - y_1z)^2 + (x_2 - y_2z)^2 + \cdots + (x_n - y_nz)^2$, $z \in \mathbb{R}$. Po rozwinięciu otrzymujemy

$$f(z) = Az^2 + 2Bz + C, \ z \in \mathbb{R}, \text{ gdzie}$$

$$A = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2, \ B = -(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n),$$

$$C = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,$$

tzn. $f(z)$ jest trójmianem kwadratowym. Z określenia wynika, że $f(z) \geq 0$ dla $z \in \mathbb{R}$, co ma miejsce tylko wtedy, gdy wyróżnik

$\Delta = 4B^2 - 4AC \leq 0$. Po rozwinięciu otrzymujemy

$$0 \geq \Delta = 4(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 - 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)$$

Stąd natychmiast otrzymujemy żądaną nierówność.

Równość w nierówności oznacza, że $\Delta = 0$, czyli równanie kwadratowe $f(z) = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $z = \lambda$, czyli

$$0 = f(\lambda) = (x_1 - \lambda y_1)^2 + (x_2 - \lambda y_2)^2 + \cdots + (x_n - \lambda y_n)^2,$$

Stąd wynika, że

$$0 = x_1 - \lambda y_1 = x_2 - \lambda y_2 = \cdots = x_n - \lambda y_n.$$

Uzupełnienia

Dwumian Newtona

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \cdots + \binom{n}{n}y^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.$$

Interpretacja symboli Newtona:

wartość $\binom{n}{k}$ jest równa liczbie k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego dla $1 \leq k \leq n$. Ponadto przyjmujemy $\binom{n}{0} = 1$.

Korzystając z tej interpretacji lub stosując metodę indukcji matematycznej uzasadniamy, że

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \text{ dla } n, k \in \mathbb{N},\ n \geq k \geq 0,$$

gdzie $0! = 1,\ n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n,$ dla $n \geq 1$

Wybrane własności symboli Newtona:

1. Trójkąt Pascala

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

$$\downarrow =$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

Wypełnianie trójkąta Pascala można przeprowadzić korzystając z zależności

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

2. Przykład:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = (1-1)^n = 0$$

Określenie potęgi a^x, gdzie $a > 1$ i $x \in \mathbb{R}$.

Def.

1. Dla $x = n \in \mathbb{N}$ określamy indukcyjnie: $a^0 = 1$, $a^{n+1} = a \cdot a^n$.
2. Dla $x = \frac{1}{n}$, gdzie $n \neq 0 \in \mathbb{N}$ określamy następująco: $a^{\frac{1}{n}} = \sup\{y > 0 : y^n \leq a\}$.
3. Niech $0 < x \in \mathbb{Q}$. Wtedy $x = \frac{m}{n}$ i $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.
4. Niech $0 < x \in \mathbb{R}$. Wtedy $a^x = \sup\{a^{\frac{m}{n}} : 0 < \frac{m}{n} < x\}$.

Uzupełnienie, dalej określamy:

1. $1^x = 1$ dla $x \geq 0$
2. $a^x = 1/(1/a)^x$ dla $0 < a < 1$ oraz $x > 0$
3. $a^x = 1/a^{-x}$ dla $a > 0$ oraz $x < 0$
4. $a^0 = 1$ dla $0 < a$
5. $a^{x+y} = a^x a^y$ dla $0 < a$ oraz $x, y \in \mathbb{R}$
6. $(a^x)^y = a^{xy}$ dla $0 < a$ oraz $x, y \in \mathbb{R}$

Monotoniczność potęgi: Niech $a > 1$ i niech $0 < x_1 < x_2$. Wtedy $a^{x_1} < a^{x_2}$.

Ciągi i granice

3. Ciągiem nazywamy funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; stosujemy oznaczenie $a_n = f(n)$.

4. Def: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, jeśli

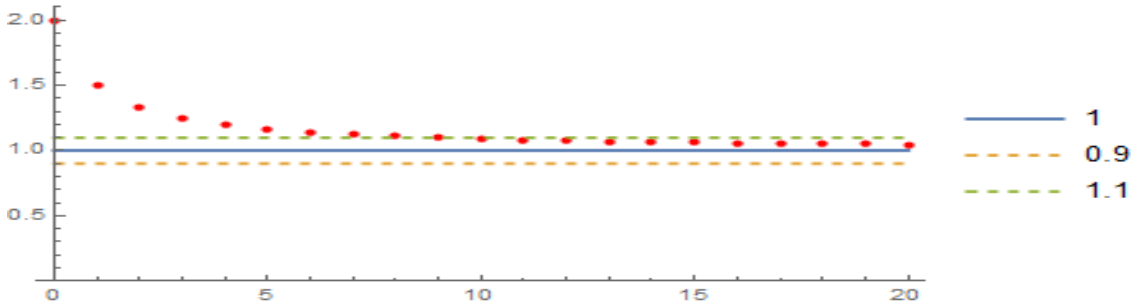
$$(L) \quad \left(\bigwedge \epsilon > 0\right)\left(\bigvee N \in \mathbb{N}\right)\left(\bigwedge n > N\right)\ (|a_n - g| < \epsilon).$$

Mówimy, że ciąg jest zbieżny do g; w skrócie piszemy $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$

5. Przykład: Jeśli $(\bigwedge n \in \mathbb{N})(a_n = c)$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.

6. Przykład: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

7. Przykład: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \cdots = 1$.



8. Warunek Cauchy'ego. Mówimy, że ciąg (a_n) spełnia warunek Cauchy'ego, jeśli

$$(C) \quad (\bigwedge \epsilon > 0)(\bigvee N \in \mathbb{N})(\bigwedge n, m > N)\ (|a_n - a_m| < \epsilon).$$

9. Tw. Jeżeli ciąg liczb rzeczywistych (a_n) jest zbieżny, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, to spełnia on warunek Cauchy'ego.
Uzasadnienie. Niech $\epsilon > 0$. Dla $\epsilon/2$ zgodnie z warunkiem (L) znajdujemy N takie, że $|a_n - g| < \epsilon/2$ dla $n > N$. Wtedy dla dowolnych $n, m > N$ mamy

$$|a_n - a_m| = |(a_n - g) + (g - a_m)| \leq |a_n - g| + |a_m - g| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

W ten sposób dla dowolnie wybranego $\epsilon > 0$ znaleźliśmy N takie, że dla $n, m > N$ spełniona jest nierówność w warunku (C), to oznacza, że warunek Cauchy'ego jest spełniony.

Uwaga. Dla ciągów liczb rzeczywistych prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne: jeżeli ciąg (a_n) spełnia warunek Cauchy'ego, to ciąg (a_n) jest zbieżny, tzn. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ dla pewnego $g \in \mathbb{R}$.

10. Przykład: Ciąg $a_n = (-1)^n$ nie ma granicy, mówimy, że jest rozbieżny:

Uzasadnienie. Nie wprost (a.c.), załóżmy, że ciąg ma granicę g. Wtedy np. dla $\epsilon = \frac{1}{2}$ istnieje takie N, że $a_n \in (g - \epsilon, g + \epsilon) = (g - \frac{1}{2}, g + \frac{1}{2})$ dla $n > N$. Wybierzmy $n_0 > N$. Wtedy $2n_0,\ 2n_0 + 1 > N$, więc

$$|a_{2n_0} - a_{2n_0+1}| = |(a_{2n_0} - g) + (g - a_{2n_0+1})| \leq |(a_{2n_0} - g)| +$$
$$|(a_{2n_0+1} - g| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Z drugiej strony

$$|a_{2n_0} - a_{2n_0+1}| = |1 - (-1)| = 2,$$

uzyskana sprzeczność dowodzi prawdziwości twierdzenia.

Własności granicy

11. Tw. (O jednoznaczności pojęcia granicy) Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g_1$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g_2$, to $g_1 = g_2$.

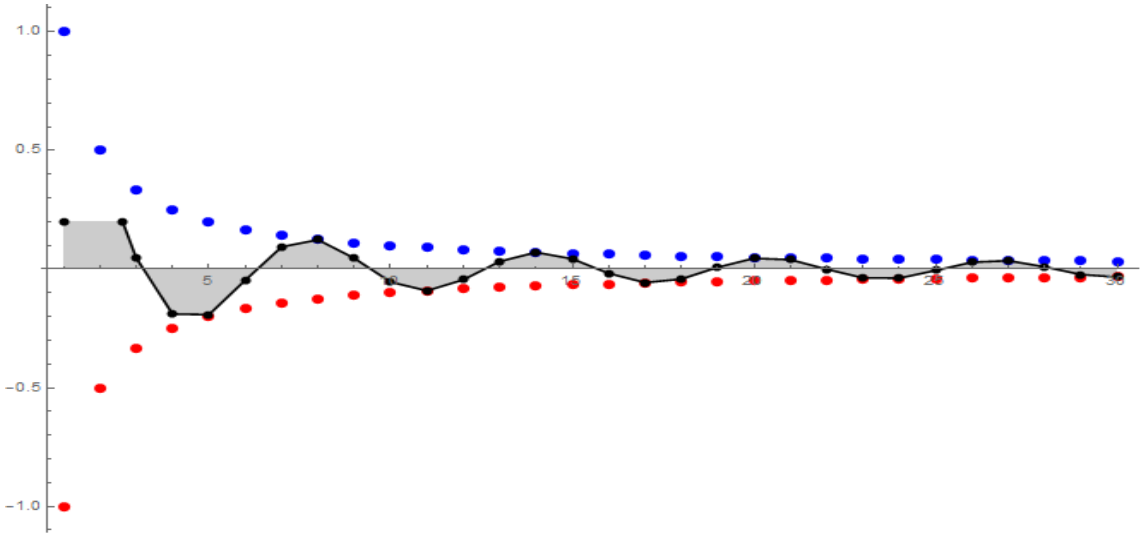
Uzasadnienie. Załóżmy nie wprost (a.c.), że $g_1 \neq g_2$. Wybierzmy $0 < \epsilon < \frac{1}{2}|g_1 - g_2|$. Wtedy odcinki $I_1 = (g_1 - \epsilon, g_1 + \epsilon)$ i $I_2 = (g_2 - \epsilon, g_2 + \epsilon)$ są rozłączne. Ponadto z określenia granicy wynika, że istnieją N_1 (w przypadku g_1) i N_2 (w przypadku g_2) takie, że $a_n \in I_1$ dla $n > N_1$ oraz $a_n \in I_2$ dla $n > N_2$. Stąd $a_n \in (I_1 \cap I_2)$ dla $n > N = \max(N_1, N_2)$, co jest niemożliwe, bo $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Uzyskana sprzeczność dowodzi prawdziwości twierdzenia.

12. Tw. (o operacjach arytmetycznych na ciągach zbieżnych). Niech ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ mają granicę właściwą, odpowiednio $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Wtedy

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3. jeżeli $b \neq 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^p = \lim\limits_{n\to\infty} a^p$, gdzie $p \in \mathbb{Z}$
5. jeżeli $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = a^{\frac{1}{k}}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$

13. Tw. (o dwóch ciągach) Jeżeli $a_n \leq b_n$ dla $n > n_0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to $a \leq b$.

14. Tw. (O trzech ciągach). Załóżmy, że $(\bigwedge n)\ (a_n \leq b_n \leq c_n)$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$. Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.



15. Tw. Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = 0$.

Uzasadnienie. Z określenia granicy: dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje N takie, że $|b_n - 0| < \epsilon$ dla $n > N$. Ponieważ $|b_n - 0| = |b_n| = ||b_n| - 0|$, wtedy również $||b_n| - 0| < \epsilon$ dla $n > N$, co oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = 0$.

16. Tw. Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Uzasadnienie. Ponieważ $-|b_n| \leq b_n \leq |b_n|$ dla $n \in \mathbb{N}$, z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy żądaną tezę.

17. Tw. Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony i ciąg $b_n \to 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Uzasadnienie. Ciąg (a_n) jest ograniczony, tzn. istnieje $M > 0$ takie, że $|a_n| \leq M$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$|a_n b_n| \leq M|b_n|$$

$$-M|b_n| \leq a_n b_n \leq M|b_n|$$

$$\lim_{n\to\infty} M|b_n| = M \cdot 0 = 0$$

Stąd na mocy twierdzenia o trzech ciągach wynika żądana równość.

18. Tw. Jeśli $0 < a$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Uzasadnienie. Niech $a > 0$ i niech $\sqrt[n]{a} = 1 + x_n$. Wtedy $x_n \geq 0$ i $a = (1 + x_n)^n = 1 + \binom{n}{1}x_n + \binom{n}{2}x_n^2 + \cdots + \binom{n}{n}x_n^n \geq 1 + \binom{n}{1}x_n$. Stąd

$0 \leq x_n \leq \frac{a-1}{n}$. Z ostatniej nierówności wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

19. Tw. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
Uzasadnienie. Niech $\sqrt[n]{n} = 1 + x_n$. Wtedy $x_n \geq 0$ i
$n = (1 + x_n)^n = 1 + \binom{n}{1}x_n + \binom{n}{2}x_n^2 + \cdots + \binom{n}{n}x_n^n \geq 1 + \binom{n}{2}x_n^2$. Stąd $x_n^2 \leq \frac{2}{n}$, co daje $0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$. Z ostatniej nierówności wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

20. Przykład: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n((\frac{3^n}{5^n}) + 1)} = \lim\limits_{n\to\infty} 5\sqrt[n]{\frac{3^n}{5^n} + 1} = 5$