Wykład 3. Kresy zbiorów. Ciągi liczbowe.

Uzupełnienia:

1. Wartość bezwzględna

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{jeśli } a \geq 0 \\ -a, & \text{jeśli } a < 0. \end{cases}$$

Własności

- Jeśli $a \leq |b|$ i $-a \leq |b|$, to $|a| \leq |b|$.
  Uzasadnienie a. przypadek $a \geq 0$: $|a| = a \leq |b|$
  b. przypadek $a < 0$: $|a| = -a \leq |b|$
  w obu przypadkach żądana nierówność jest prawdziwa.

- $\bigwedge\limits_{x,y} |x + y| \leq |x| + |y|$
  Uzasadnienie

  $$\begin{array}{ll} x \leq |x|,\ y \leq |y| & -x \leq |x|,\ -y \leq |y| \\ x + y \leq |x| + |y| & -(x + y) \leq |x| + |y| \end{array}$$

  $$|x + y| \leq |x| + |y|$$

  $$\begin{array}{ll} x \leq |x|,\ y \leq |y| & -x \leq |x|,\ -y \leq |y| \\ x + y \leq |x| + |y| & -(x + y) \leq |x| + |y| \end{array}$$

  $$|x + y| \leq |x| + |y|$$

- $\bigwedge\limits_{x,y} ||x| - |y|| \leq |x - y|$
  Uzasadnienie

  $$\begin{array}{ll} |x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|, & \text{zamiana } x \text{ na } y \\ |x| - |y| \leq |x - y| & |y| - |x| \leq |x - y| \end{array}$$

  $$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

- $\bigwedge\limits_{x,y} ||x| - |y|| \leq |x - y|$
  Uzasadnienie

  $$\begin{array}{ll} |x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|, & \text{zamiana } x \text{ na } y \\ |x| - |y| \leq |x - y| & |y| - |x| \leq |x - y| \end{array}$$

  $$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

2. Kresy zbiorów.

Niech $A \neq \emptyset$, będzie ograniczony, tzn. istnieją liczby $m, M \in \mathbb{R}$, take, że $m \leq a \leq M$ dla każdego $a \in A$. Określamy

- zbiór $\check{A}$ liczb $\check{a}$ ograniczających zbiór A od dołu: $\check{A} = \{\check{a} : \bigwedge\limits_{a} a \in A \Rightarrow \check{a} \leq a\} \cup \{-\infty\}$
- zbiór $\hat{A}$ liczb $\hat{a}$ ograniczających zbiór A od dołu: $\hat{A} = \{\hat{a} : \bigwedge\limits_{a} a \in A \Rightarrow a \leq \hat{a}\} \cup \{\infty\}$

Z **zasady zupełności** wynika, że w zbiorze $\check{A}$ jest element największy $\max \check{A} \in \check{A}$, a w zbiorze $\hat{A}$ jest element najmnieszy $\min \hat{A} \in \hat{A}$. Te liczby służą do określenia kresów zbioru A:

- kres dolny: $\inf A = \max \check{A}$
- kres górny: $\sup A = \min \hat{A}$.

Z określenia kresów wynika, że

- $\bigwedge\limits_{a \in A} \inf A \leq a \leq \sup A$

Przykład
Niech $A = [0, 2]$. Wtedy

$$\check{A} = (-\infty, 0] \cup \{-\infty\}, \ \hat{A} = [2, \infty) \cup \{\infty\}$$

$$\max \check{A} = \inf A = 0, \quad \min \hat{A} = \sup A = 2.$$

Przykład
Niech $A = (0, 2)$. Wtedy

$$\check{A} = (-\infty, 0] \cup \{-\infty\}, \ \hat{A} = [2, \infty) \cup \{\infty\}$$

$$\max \check{A} = \inf A = 0, \quad \min \hat{A} = \sup A = 2.$$

Przykład
Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest nieograniczony od góry ($\hat{\mathbb{N}} = \{\infty\}$ i $\sup \mathbb{N} = \infty$).
Uzasadnienie
Dowód nie wprost (a.c.), zakładamy przeciwnie, że zbiór $\mathbb{N}$ jest ograniczony

od góry. Niech $c = \sup \mathbb{N}$. Wtedy liczba $c-1$ (jako mniejsza od c) nie jest liczbą ograniczającą zbiór $\mathbb{N}$ od góry, więc istnieje liczba naturalna $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że $c-1 < n_0$. Ponieważ wtedy $c < n_0+1$ i $n_0+1 \in \mathbb{N}$, c nie jest liczbą ograniczającą zbiór $\mathbb{N}$ od góry. Uzyskana sprzeczność dowodzi prawdziwości twierdzenia.

Wniosek: $(\bigwedge x \in \mathbb{R})(x > 0) \Rightarrow (\bigvee n \in \mathbb{N}) \left(0 < \frac{1}{n} < x\right)$.

Wniosek. Niech $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Wtedy $\check{A} = (-\infty, 0]$ i $\inf(A) = 0$.
Przykład.
Niech $A = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$. Wtedy $\inf A = 0$ i $\sup A = 1$.
Uzasadnienie.

- $\sup A$: $1 = 2^0 > 2^{-n}$ dla $n \geq 1$;
- $\inf A$: zaczniemy od udowodnienia indukcyjnie nierówności

  $$2^{-n} < \frac{1}{n}$$

  dla $n \geq 2$, jest to nasza teza $T(n)$.

  1. $T(2)$: $L = 2^{-2} = \frac{1}{4}$, $P = \frac{1}{2}$, widzimy, że $L < P$,

  2. dowodzimy, że $T(n) \Rightarrow T(n+1)$:

  $$L = 2^{-(n+1)} = \frac{1}{2}2^{-n} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n},\ P = \frac{1}{n+1},$$

  widzimy, że $L < P$.

Na mocy zasady indukcji nasza teza $T(n)$ jest prawdziwa dla każdego naturalnego $n \geq 2$.

Stąd $(\bigwedge x \in \mathbb{R})(x > 0) \Rightarrow (\bigvee n \in \mathbb{N}) \left(0 < 2^{-n} < \frac{1}{n} < x\right)$, co oznacza, że $\inf(\{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}) = 0$.

Ciągi i granice

1. Ciągiem nazywamy funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; stosujemy oznaczenie $a_n = f(n)$.

2. Def. granicy ciągu: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, jeśli

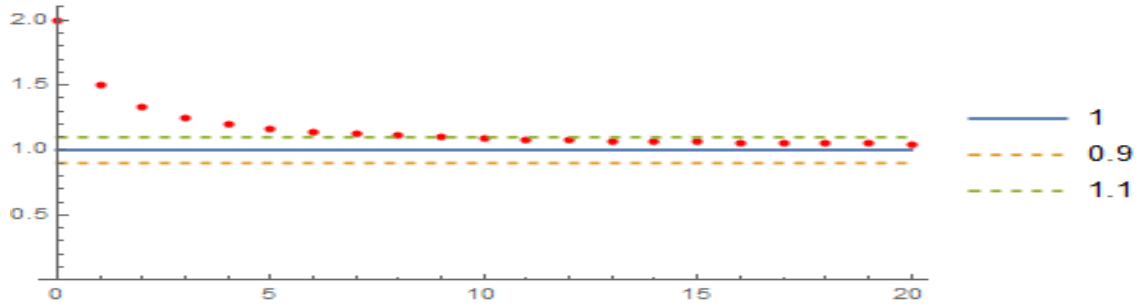
(L) $(\bigwedge \epsilon > 0)(\bigvee N \in \mathbb{N})(\bigwedge n > N)\ (|a_n - g| < \epsilon)$.

Mówimy, że ciąg jest zbieżny do g; w skrócie piszemy $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$

3. Przykład: Jeśli $(\bigwedge n \in \mathbb{N})(a_n = c)$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$. Uzasadnienie: rozpatrzmy dowolnie wybrany $\epsilon > 0$, w przedziale $(c-\epsilon, c+\epsilon)$ są wszystkie wyrazy ciągu $\{a_n\}$.

4. Przykład: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Uzasadnienie: rozpatrzmy dowolnie wybrany $\epsilon > 0$, wtedy dla wszystkich naturalnych n spełniających nierówność $n > \frac{1}{\epsilon}$, zachodzi $\frac{1}{n+1} \in (0-\epsilon, 0+\epsilon)$.

5. Przykład: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \cdots = 1$. Uzasadnienie: rozpatrzmy dowolnie wybrany $\epsilon > 0$, wtedy dla wszystkich naturalnych n spełniających nierówność $n > \frac{1}{\epsilon}$, zachodzi $1 + \frac{1}{n+1} \in (1-\epsilon, 1+\epsilon)$.



Rys. Ciąg $a_n = 1 + \frac{1}{n+1}$, granica $g = 1$, $\epsilon = 0.1$.

6. Warunek Cauchy'ego. Mówimy, że ciąg (a_n) spełnia warunek Cauchy'ego, jeśli

$$(C) \quad (\bigwedge \epsilon > 0)(\bigvee N \in \mathbb{N})(\bigwedge n, m > N)\ (|a_n - a_m| < \epsilon).$$

7. Tw. Jeżeli ciąg liczb rzeczywistych (a_n) jest zbieżny, $\lim\limits_{n} a_n = g$, to spełnia on warunek Cauchy'ego.
Uzasadnienie. Niech $\epsilon > 0$. Dla $\epsilon/2$ zgodnie z warunkiem (L) znajdujemy N takie, że $|a_n - g| < \epsilon/2$ dla $n > N$. Wtedy dla dowolnych $n, m > N$ mamy

$$|a_n - a_m| = |(a_n - g) + (g - a_m)| \leq |a_n - g| + |a_m - g| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

W ten sposób dla dowolnie wybranego $\epsilon > 0$ znaleźliśmy N takie, że dla $n, m > N$ spełniona jest nierówność w warunku (C), to oznacza, że warunek Cauchy'ego jest spełniony.

Uwaga. Dla ciągów liczb rzeczywistych prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne: jeżeli ciąg (a_n) spełnia warunek Cauchy'ego, to ciąg (a_n) jest zbieżny, tzn. $\lim\limits_n a_n = g$ dla pewnego $g \in \mathbb{R}$.

8. Przykład: Ciąg $a_n = (-1)^n$ nie ma granicy, mówimy, że jest rozbieżny:

Uzasadnienie. Nie wprost (a.c.), załóżmy, że ciąg ma granicę g. Wtedy np. dla $\epsilon = \frac{1}{2}$ istnieje takie N, że $a_n \in (g-\epsilon, g+\epsilon) = (g-\frac{1}{2}, g+\frac{1}{2})$ dla $n > N$. Wybierzmy $n_0 > N$. Wtedy $2n_0,\ 2n_0+1 > N$, więc

$$|a_{2n_0} - a_{2n_0+1}| = |(a_{2n_0} - g) + (g - a_{2n_0+1})| \leq |(a_{2n_0} - g)| +$$
$$|(a_{2n_0+1} - g| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Z drugiej strony

$$|a_{2n_0} - a_{2n_0+1}| = |1 - (-1)| = 2,$$

uzyskana sprzeczność dowodzi prawdziwości twierdzenia.

Własności granicy

9. Tw. (O jednoznaczności pojęcia granicy) Jeśli $\lim\limits_n a_n = g_1$ oraz $\lim\limits_n a_n = g_2$, to $g_1 = g_2$.

Uzasadnienie. Załóżmy nie wprost (a.c.), że $g_1 \neq g_2$. Wybierzmy $0 < \epsilon < \frac{1}{2}|g_1 - g_2|$. Wtedy odcinki $I_1 = (g_1 - \epsilon, g_1 + \epsilon)$ i $I_2 = (g_2 - \epsilon, g_2 + \epsilon)$ są rozłączne. Ponadto z określenia granicy wynika, że istnieją N_1 (w przypadku g_1) i N_2 (w przypadku g_2) takie, że $a_n \in I_1$ dla $n > N_1$ oraz $a_n \in I_2$ dla $n > N_2$. Stąd $a_n \in (I_1 \cap I_2)$ dla $n > N = \max(N_1, N_2)$, co jest niemożliwe, bo $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Uzyskana sprzeczność dowodzi prawdziwości twierdzenia.

10. Tw. (o operacjach arytmetycznych na ciągach zbieżnych). Niech ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ mają granicę właściwą, odpowiednio $a = \lim\limits_n a_n$ i $b = \lim\limits_n b_n$. Wtedy

1. $\lim\limits_n (a_n \pm b_n) = a \pm b$
2. $\lim\limits_n (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3. jeżeli $b \neq 0$, to $\lim\limits_n \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

4. $\lim\limits_n (a_n)^p = \lim\limits_n a^p$, gdzie $p \in \mathbb{Z}$

5. jeżeli $a = \lim\limits_n a_n > 0$, to $\lim\limits_n \sqrt[k]{a_n} = a^{\frac{1}{k}}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$

11. Tw. (o dwóch ciągach) Jeżeli $a_n \leq b_n$ dla $n > n_0$ i $\lim\limits_n a_n = a$, $\lim\limits_n b_n = b$, to $a \leq b$.