Ciągi monotoniczne

1. Def. Ciąg (a_n) jest niemalejący, jeśli $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \ldots$

2. Def. Ciąg (a_n) jest rosnący, jeśli $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \ldots$

3. Def. Ciąg (a_n) jest nierosnący, jeśli $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \ldots$

4. Def. Ciąg (a_n) jest malejący, jeśli $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > \ldots$

5. Tw. (o istnieniu granicy ciągu monotonicznego i ograniczonego) Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest niemalejący dla $n > n_0$ i ograniczony z góry, to ma granicę. Podobnie, jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest nierosnący dla $n > n_0$ i ograniczony z dołu, to ma granicę.

6. Ciągi rozbieżne do nieskończoności, granica niewłaściwa

7. Def. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, jeśli $(\bigwedge C \in \mathbb{R})(\bigvee N \in \mathbb{N})(\bigwedge n > N)\ (C < a_n)$

8. Def. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, jeśli $(\bigwedge C \in \mathbb{R})(\bigvee N \in \mathbb{N})(\bigwedge n > N)\ (a_n < C)$

Podciągi

9. Def. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych i niech $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \ldots$ będzie ciągiem liczb naturalnych. Wtedy ciąg (b_k), $b_k = a_{n_k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ jest podciągiem ciągu (a_n).

10. (Granica podciągu) Tw. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ oraz $n_1 < n_2 < \ldots$, to $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = g$

11. Wniosek. Ciąg, z którego można wybrać dwa podciągi z różnymi granicami (właściwymi lub niewłaściwymi), nie ma granicy.

12. Przykład: a) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n^2+2n}$ - nie istnieje, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{n\pi}{3}$ - nie istnieje.

13. Tw. Jeśli $(\bigwedge n \in \mathbb{N})(a_n \leq b_n)$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$

14. Zasady postępowania z nieskończonościami:

1.	$a+\infty=\infty$ dla $-\infty<a\leq\infty$	2.	$a\cdot\infty=\infty$ dla $0<a\leq\infty$
3.	$a-\infty=-\infty$ dla $-\infty<a\leq\infty$	4.	$a\cdot\infty=-\infty$ dla $-\infty\leq a<0$
5.	$\frac{a}{\infty}=0$ dla $-\infty<a<\infty$	6.	$\frac{a}{0+}=\infty$ dla $0<a\leq\infty$
7.	$a^{\infty}=0$ dla $0+\leq a<1$	8.	$a^{\infty}=\infty$ dla $1<a\leq\infty$
9.	$\infty^{b}=0$ dla $-\infty\leq b<0$	10.	$\infty^{b}=\infty$ dla $0<b\leq\infty$

Wyrażenia nieoznaczone

$\infty-\infty$	$0\cdot\infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	1^{∞}	∞^{0}	0^{0}

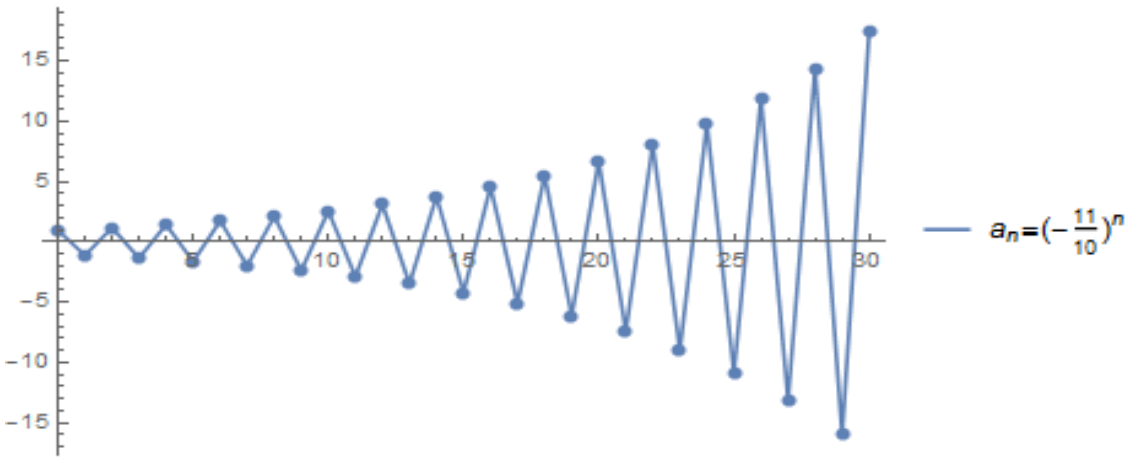
Uwaga. Wyrażenia w tabelkach są symbolicznym zapisem odpowiednich faktów, np.

1. $\frac{a}{0+}=\infty$ oznacza, że w przypadku, gdy $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $0<a\leq\infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, $b_n\geq 0$ dla $n>n_0$, zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$.

2. zapis $\infty-\infty$ oznacza, że w przypadku, gdy $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$, to zbieżność ciągu a_n-b_n musi być badana inaczej, niż za pomocą twierdzenia o granicy dwóch ciągów.

15. Przykład. Niech $a\in\mathbb{R}$ będzie ustaloną liczbą. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}\infty, & a>1\\ 1, & a=1\\ 0, & |a|<1\\ \text{nie istnieje}, & a\leq -1\end{cases}$$



16. Tw. (o dwóch ciągach) Jeżeli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ spełniają warunki

1. $a_n \leq b_n$ dla każdego $n \geq n_0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$,

to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

17. Tw. Jeżeli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ spełniają warunki

1. $a_n \leq b_n$ dla każdego $n \geq n_0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$,

to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

18. Ważne granice ciągów

Liczba e: $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\quad e = \lim\limits_{n\to\infty} e_n$

Uzasadnienie, że granica istnieje

- ciąg $\{e_n\}$ jest niemalejący, sprawdzenie

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} =$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \overset{a}{\geq}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Uwaga: nierówność $\overset{a}{\geq}$ została otrzymana w wyniku zastosowania nier. Bernoulliego do wyrażenia $\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$.

- ciąg $\{e_n\}$ jest ograniczony:

(1) $$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\frac{(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)\dots n}{n^k} =$$

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

(2) $$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} +$$

$$\dots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot$$

$$\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n}\right) + \dots \leq$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq$$

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 1 + 1 + 1 = 3$$

w przedostaniej nierówności skorzystaliśmy z nierówności $2^{n-1} \leq n!$, $\bigwedge n \geq 1$.

Inne (równoważne) określenie liczby e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$$

Uzasadnienie istnienia granicy powyższej granicy. Przyjmujemy

$$f_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!},$$

- ciąg $\{f_n\}$ jest niemalejący (oczywiste)
- ciąg $\{f_n\}$ jest ograniczony: dowód jak dla e_n (dwie ostatnie nierówności), $f_n \leq 1 + 1 + 1 = 3$

- zachodzi $e_n \leq f_n$, $\bigwedge\limits_n$.

Wniosek: istnieje granica $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ i $e \leq f$

- dla podciągów $\{e_{n^3}\}$ i $\{f_{n+1}\}$ zachodzą nierówności

$e_{n^3} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n^3}\right) + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{n}{n^3}\right)\left(1 - \frac{n-1}{n^3}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^3}\right) +$
$\ldots \geq \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}\right)\left(1 - \frac{n}{n^3}\right)^n =$
$\left(1 - \frac{n}{n^3}\right)^n f_{n+1} = \left[\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} f_{n+1}$

- przechodząc do granicy otrzymujemy

$e = \lim\limits_{n\to\infty} e_{n^3} \geq \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} f_{n+1} = f$

Wniosek: $e \leq f$ i $e \geq f$, stąd $e = f$, co należało udowodnić.

19. Przykłady:

a)	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty$, gdzie $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$
b)	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} = \infty$, gdzie $a > 0$
c)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$
d)	$\lim\limits_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = 1$
e)	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, $e = 2.731\ldots$ - stała matematyczna
f)	$\lim\limits_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$, gdzie $\ln(\cdot) = \log_e(\cdot)$
g)	$\lim\limits_{n\to\infty} n \log_a\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log_a e$, gdzie $a > 0, a \neq 1$

Uzasadnienie

a) Niech $a = 1 + y$, $y > 0$. Wtedy ze wzoru Newtona dla $n > k$ otrzymujemy

$$a^n = (1+y)^n = 1 + \binom{n}{1}y^1 + \binom{n}{2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k+1}y^{k+1} + \cdots + \binom{n}{n}y^n >$$
$$\binom{n}{k+1}y^{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} \cdot y^{k+1} \cdot n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)$$

Stąd

$$\frac{a^n}{n^k} > \frac{1}{(k+1)!} \cdot y^{k+1} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{n^k}$$

Zauważamy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(k+1)!} \cdot y^{k+1} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{n^k} =$$

$$\underbrace{\frac{1}{(k+1)!} \cdot y^{k+1}}_{=c} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k}{n}\right) n = \infty,$$

stąd wynika żądana granica.

b) Wybieramy n_0 takie, że $2a < n_0$. Wtedy dla $n > n_0$ zachodzi

$$\frac{n!}{a^n} = \frac{n_0!}{a^{n_0}} \cdot \underbrace{\frac{n_0+1}{a} \cdot \frac{n_0+2}{a} \cdot \frac{n_0+3}{a} \dots \frac{n}{a}}_{n-n_0 \text{ czynników}} \geq \frac{n_0!}{a^{n_0}} \cdot 2^{n-n_0}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_0!}{a^{n_0}} \cdot 2^{n-n_0} = \infty$$

c) Z nierówności

(A) $\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$

dla $0 \leq x \leq \pi/2$ wynika, że

$$0 \leq \sin \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Istnienie i wartość granicy wynikają teraz z twierdzenia o trzech ciągach.

d) z nierówności (A) mamy

$$\cos \frac{1}{n} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{n}} \leq n \sin \frac{1}{n} \leq 1.$$

Istnienie i wartość granicy wynikają teraz z twierdzenia o trzech ciągach.

e) Pamiętamy, że ciąg $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ma następujące własności

1. e_n jest niemalejący
2. $1 < e_n < e$, $\bigwedge n \in \mathbb{N}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = e$

Zastosujemy metodę nie wprost (a contrario). Zakładamy, że istnieje $\epsilon > 0$ takie, że dla nieskończenie wielu n, wyrazy $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln e_n$ leży poza przedziałem $(1 - \epsilon, 1)$, tzn.

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 - \epsilon, \text{ dla nieskończenie wielu } n \in \mathbb{N}$$

Stąd

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e^{1-\epsilon}, \text{ dla nieskończenie wielu } n \in \mathbb{N}$$

Ostatnie stwierdzenie nie może być prawdziwe, bo ciąg $e_n \to e = e^1$. Uzyskana sprzeczność dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

g) Wystarczy zauważyć, że

$$\log_a z = \frac{\ln z}{\ln a} = (\ln z) \cdot (\log_a e)$$

dla $z > 0$.

20. Korzystając z definicji granicy właściwej ciągu uzasadnić, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n^2+1}}{n} = 3$$

d-d. Naszym zadaniem jest uzasadnienie, że prawdziwe jest zdanie

$$(3) \quad \bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} \left| \frac{\sqrt{9n^2+1}}{n} - 3 \right| < \epsilon$$

Zaczynamy od analizy wyrażenia w (3), tu celem jest znalezienie prostszego wyrażenia szacującego je od góry

$$\left| \frac{\sqrt{9n^2+1}}{n} - 3 \right| = \left| \frac{\sqrt{9n^2+1} - 3n}{n} \right| = \left| \frac{1}{n(\sqrt{9n^2+1} + 3n)} \right| =$$
$$\frac{1}{n(\sqrt{9n^2+1} + 3n)} \leq \frac{1}{n(3n + 3n)} \leq \frac{1}{6n^2}$$

Niech teraz $\epsilon > 0$. Dobieramy liczbę n_0 taką, że

$$\frac{1}{6n_0^2} < \epsilon,$$

np. można wząć $n_0 = \frac{1}{\sqrt{6\epsilon}} + 1$. Teraz zauważamy, że dla $n > n_0$ zachodzą nierówności

$$\epsilon > \frac{1}{6n_0^2} > \frac{1}{6n^2} > \left| \frac{\sqrt{9n^2+1}}{n} - 3 \right|,$$

co dowodzi prawdziwości zdania (3).

21. Korzystając z definicji granicy właściwej ciągu uzasadnić, że

$$\lim_{n\to\infty} \log_{n+1} 5 = 0$$

d-d. Naszym zadaniem jest uzasadnienie, że prawdziwe jest zdanie

$$(4) \quad \bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} \left|\log_{n+1} 5 - 0\right| < \epsilon$$

Niech teraz $\epsilon > 0$. Przechodzimy do wskazania liczby n_0. Na wstępie zauważamy, że dla $n > n_0$ zachodzi nierówność

$$\log_{n_0+1} 5 > \log_{n+1} 5$$

Stąd przyjmując n_0 takie, że

$$\log_{n_0+1} 5 = \epsilon, \text{ czyli } n_0 = 5^{\frac{1}{\epsilon}} - 1$$

otrzymujemy

$$\epsilon = \log_{n_0+1} 5 > \left|\log_{n+1} 5 - 0\right|.$$

co dowodzi prawdziwości zdania (4).

22. Korzystając z definicji granicy niewłaściwej ciągu uzasadnić, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \sqrt[n]{3}} = -\infty.$$

d-d. Naszym zadaniem jest uzasadnienie, że prawdziwe jest zdanie

$$(5) \quad \bigwedge_{M} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} M \geq \frac{1}{1 - \sqrt[n]{3}}.$$

Wystarczy rozpatrywać $M < 0$ (dlaczego?). Przechodzimy do wskazania liczby n_0. Na wstępie zauważamy, że dla $n > n_0$ zachodzą nierówności

$$\sqrt[n_0]{3} > \sqrt[n]{3} > 1,$$

skąd

$$\frac{1}{1-\sqrt[n]{3}} < \frac{1}{1-\sqrt[n_0]{3}}$$

Dalej przyjmując n_0 takie, że

$$\frac{1}{1-\sqrt[n_0]{3}} < M,$$

czyli

$$\sqrt[n_0]{3} < 1 - \frac{1}{M} = \frac{M-1}{M},$$
$$n_0 > \frac{1}{\log_3 \frac{M-1}{M}}$$

otrzymujemy

$$M > \frac{1}{1-\sqrt[n_0]{3}} > \frac{1}{1-\sqrt[n]{3}}.$$

dla $n > n_0$, co dowodzi prawdziwości zdania (5).

23. Niech $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}$. Udowodnić, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

d-d. Określamy pomocnicze ciągi

$$\alpha_n = \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}}, \quad \beta_n = \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+1}}$$

Zauważamy, że

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}} = 1,$$

podobnie $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 1$

$$\alpha_n = \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}} \leq a_n \leq \beta_n = \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+1}}$$

Teraz wystarczy zastosować twierdzenie o trzech ciągach, skąd otrzymujemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

24. Niech $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$. Udowodnić, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

d-d. Spostrzeżenie

- ciąg $\{a_n\}$ jest niemalejący.
  Uzasadnienie: $2 = a_1 \leq \sqrt{6+2} = a_2$. Zakładamy, że $a_n \leq a_{n+1}$.
  Wtedy dla $n+1$ mamy:

  $$a_{n+2} - a_{n+1} = \sqrt{6 + a_{n+1}} - \sqrt{6 + a_n} =$$
  $$\frac{(\sqrt{6 + a_{n+1}} - \sqrt{6 + a_n})(\sqrt{6 + a_{n+1}} + \sqrt{6 + a_n})}{\sqrt{6 + a_{n+1}} + \sqrt{6 + a_n}} =$$
  $$\frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt{6 + a_{n+1}} + \sqrt{6 + a_n}} \geq 0$$

  Ostatnia nierówność zachodzi na podstawie założenia indukcyjnego.
  Teraz z zasady indukcji wynika teza naszego zadania.

- ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony, $2 \leq a_n \leq 3$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

  Uzasadnienie:

  1. $2 = a_1 \leq a_n \bigwedge n$, bo $\{a_n\}$ jest niemalejący

  2. zakładamy, że $a_n \leq 3$, wtedy dla $n+1$ zachodzi
  $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \leq \sqrt{6+3} = 3$. Na mocy zasady indukcji $a_n \leq 3$
  $\bigwedge n \in \mathbb{N}$

- ponieważ ciąg $\{a_n\}$ jest niemalejący i ograniczony, posiada granicę g

- wyznaczenie g:

  $$g = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6 + a_n} = \sqrt{6 + g}$$
  $$g^2 = 6 + g,\ g_1 = -2,\ g_2 = 3$$

  rozwiązanie ujemne odrzucamy, więc $g = 3$

Ciągi - uzupełnienia

25. Definicja. 1. Punkt $s \in \mathbb{R}$ nazywamy punktem skupienia ciągu (a_n), jeśli

$(\bigwedge \epsilon > 0)$ w odcinku $(s-\epsilon, s+\epsilon)$ znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu (a_n).

∞ jest punktem skupienia ciągu (a_n), jeśli $\bigwedge A$ nieskończenie wiele wyrazów ciągu (a_n) spełnia nierówność $A \leq a_n$
$-\infty$ jest punktem skupienia ciągu (a_n), jeśli $\bigwedge A$ nieskończenie wiele wyrazów ciągu (a_n) spełnia nierówność $a_n \leq A$

26. Niech S będzie zbiorem punktów skupienia ciągu (a_n). Określamy granice:

granica dolna ciągu (a_n): $\liminf a_n = \inf S$
granica górna ciągu (a_n): $\limsup a_n = \sup S$

27. Fakt. Ciąg (a_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\liminf a_n = \limsup a_n$.

28. Twierdzenie (o podciągu zbieżnym do punktu skupienia)
Jeżeli $s \in \mathbb{R}$ jest punktem skupienia ciągu (a_n), to istnieje podciąg $(a_{n_k}) \subset (a_n)$ zbieżny do s, tzn. $s = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$.

Uzasadnienie:

1. przyjmujemy $\epsilon = 1$: spośród nieskończenie wielu wyrazów ciągu (a_n) zawartych w odcinku $(s-\epsilon, s+\epsilon)$ wybieramy jeden, a_{n_1} (n_1 jest indeksem tego wyrazu),

2. przyjmujemy $\epsilon = 1/2$: spośród nieskończenie wielu wyrazów ciągu (a_n) zawartych w odcinku $(s-\epsilon, s+\epsilon)$ wybieramy jeden, a_{n_2} o indeksie $n_2 > n_1$,

3. przyjmujemy $\epsilon = 1/3$: spośród nieskończenie wielu wyrazów ciągu (a_n) zawartych w odcinku $(s-\epsilon, s+\epsilon)$ wybieramy jeden, a_{n_3} o indeksie $n_3 > n_2$,

   kontynujemy ten proces, zgodnie z algorytmem, jeśli wybraliśmy wyraz a_{n_k} o indeksie $n_k > n_{k-1}$, to w następnym kroku postępujemy jak następuje

$(k+1)$. przyjmujemy $\epsilon = 1/(k+1)$: spośród nieskończenie wielu wyrazów ciągu (a_n) zawartych w odcinku $(s-\epsilon, s+\epsilon)$ wybieramy jeden, $a_{n_{k+1}}$ o indeksie $n_{k+1} > n_k$,

W wyniku tej konstrukcji otrzymujemy podciąg (a_{n_k}) $(n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \dots)$. Ponadto zauważamy, że

$$s - 1/k < a_{n_k} < s + 1/k$$

Przechodząc z $k \to \infty$, z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = s.$$

29. Twierdzenie(Bolzano-Weierstrassa o ciągach ograniczonych) Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony, to ma zbieżny podciąg $\{b_k\}$, $b_k = a_{n_k}$, $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \dots$.

Uzasadnienie. Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony, więc jest przedział $[c_1, d_1]$ taki, że $c_1 \le a_n \le d_1$, $\bigwedge n \in \mathbb{N}$. Konstruujemy pomocniczy ciąg przedziałów $\{[c_n, d_n]\}$ taki, że $[c_1, d_1] \supset [c_2, d_2] \supset [c_3, d_3] \supset \cdots \supset [c_n, d_n] \supset \dots$ lub równoważnie $c_1 \le c_2 \le c_3 \le \cdots \le c_n \le \cdots \le d_n \le \cdots \le d_3 \le d_2 \le d_1$.

$[c_2, d_2]$: niech $s = (c_1 + d_1)/2$ (środek przedziału $[c_1, d_1]$), wtedy przynajmniej jeden z przedziałów $[c_1, s]$ lub $[s, d_1]$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$.
Przyjmujemy
$c_2 = c_1$, $d_2 = s$, jeżeli $[c_1, s]$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$,
$c_2 = s$, $d_2 = d_1$, jeżeli $[c_1, s]$ zawiera tylko skończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$.
Podsumowanie

1. $c_2 \le c_1 \le d_2 \le d_1$, $|d_2 - c_2| = \frac{1}{2}|d_1 - c_1|$,

2. $[c_2, d_2]$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$

$[c_3, d_3]$: powtarzamy konstrukcję, niech $s = (c_2 + d_2)/2$ (środek przedziału $[c_2, d_2]$), wtedy przynajmniej jeden z przedziałów $[c_2, s]$ lub $[s, d_2]$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$.
Przyjmujemy
$c_3 = c_2$, $d_3 = s$, jeżeli $[c_2, s]$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$,

$c_3 = s$, $d_3 = d_2$, jeżeli $[c_2, s]$ zawiera tylko skończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$.

Podsumowanie

1. $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq d_3 \leq d_2 \leq d_1$, $|d_3 - c_3| = \frac{1}{2}|d_2 - c_2| = \frac{1}{2^2}|d_1 - c_1|$,
2. $[c_3, d_3]$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$

...
jeżeli już skonstruowaliśmy przedział $[c_n, d_n]$, to przechodzimy do konstrukcji przedziału $[c_{n+1}, d_{n+1}]$

$[c_{n+1}, d_{n+1}]$: powtarzamy konstrukcję, niech $s = (c_n + d_n)/2$ (środek przedziału $[c_n, d_n]$), wtedy przynajmniej jeden z przedziałów $[c_n, s]$ lub $[s, d_n]$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$
Przyjmujemy
$c_{n+1} = c_n$, $d_{n+1} = s$, jeżeli $[c_n, s]$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$,
$c_{n+1} = s$, $d_{n+1} = d_n$, jeżeli $[c_n, s]$ zawiera tylko skończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$.

$\vdots$

Podsumowanie

1. $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \cdots \leq c_n \leq c_{n+1} \leq d_{n+1} \leq d_n \leq \cdots \leq d_3 \leq d_2 \leq d_1$,
2. $|d_{n+1} - c_{n+1}| = \frac{1}{2}|d_n - c_n| = \frac{1}{2^n}|d_1 - c_1|$,
3. $[c_{n+1}, d_{n+1}]$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$

Wniosek. *Ciągi $\{c_n\}$ i $\{d_n\}$ są monotoniczne, ograniczone, więc zbieżne. Ponadto $\lim_{n\to\infty} |d_n - c_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}}|d_1 - c_1| = 0$. Stąd*

$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} d_n = g$, *dla pewnego $g \in [c_1, d_1]$.*

Przechodzimy do konstrukcji zbieżnego podciągu $\{b_n\}$ ciągu $\{a_n\}$.

b_1 : przyjmujemy $b_1 = a_1$, $n_1 = 1$
b_2 : w przedziale $[c_2, d_2]$ jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$. Pozwala to wybrać element $a_{n_2} \in [c_2, d_2]$ taki, że $n_1 < n_2$. Przyjmujemy $b_2 = a_{n_2}$.
b_3 : w przedziale $[c_3, d_3]$ jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$.

Pozwala to wybrać element $a_{n_3} \in [c_3, d_3]$ taki, że $n_1 < n_2 < n_3$.
Przyjmujemy $b_3 = a_{n_3}$.
...
jeżeli wybraliśmy b_k, to przechodzimy do wyboru b_{k+1} zgodnie z algorytmem
b_{k+1}: w przedziale $[c_{k+1}, d_{k+1}]$ jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$.
Pozwala to wybrać element $a_{n_{k+1}} \in [c_{k+1}, d_{k+1}]$ taki, że
$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1}$. Przyjmujemy $b_{k+1} = a_{n_{k+1}}$.

Wniosek. *Zauważamy, że* $c_k \leq b_k \leq d_k$, $\bigwedge k \in \mathbb{N}$. *Stąd i z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że* $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = g$.