Wykład 4. Ciągi liczbowe, cd.

Ciągi i granice

1. Warunek Cauchy'ego. Mówimy, że ciąg (a_n) spełnia warunek Cauchy'ego, jeśli

$$(C) \quad \left(\bigwedge \epsilon > 0\right)\left(\bigvee N \in \mathbb{N}\right)\left(\bigwedge n, m > N\right)\ (|a_n - a_m| < \epsilon)\,.$$

2. Tw. Jeżeli ciąg liczb rzeczywistych (a_n) jest zbieżny, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, to spełnia on warunek Cauchy'ego.
Uzasadnienie. Niech $\epsilon > 0$. Dla $\epsilon/2$ zgodnie z warunkiem (L) znajdujemy N takie, że $|a_n - g| < \epsilon/2$ dla $n > N$. Wtedy dla dowolnych $n, m > N$ mamy

$$|a_n - a_m| = |(a_n - g) + (g - a_m)| \leq |a_n - g| + |a_m - g| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

W ten sposób dla dowolnie wybranego $\epsilon > 0$ znaleźliśmy N takie, że dla $n, m > N$ spełniona jest nierówność w warunku (C), to oznacza, że warunek Cauchy'ego jest spełniony.

Uwaga. Dla ciągów liczb rzeczywistych prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne: jeżeli ciąg (a_n) spełnia warunek Cauchy'ego, to ciąg (a_n) jest zbieżny, tzn. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ dla pewnego $g \in \mathbb{R}$.

3. Przykład: Ciąg $a_n = (-1)^n$ nie ma granicy, mówimy, że jest rozbieżny:

Uzasadnienie. Nie wprost (a.c.), załóżmy, że ciąg ma granicę g. Wtedy np. dla $\epsilon = \frac{1}{2}$ istnieje takie N, że $a_n \in (g - \epsilon, g + \epsilon) = (g - \frac{1}{2}, g + \frac{1}{2})$ dla $n > N$. Wybierzmy $n_0 > N$. Wtedy $2n_0,\ 2n_0 + 1 > N$, więc

$$|a_{2n_0} - a_{2n_0+1}| = |(a_{2n_0} - g) + (g - a_{2n_0+1})| \leq |(a_{2n_0} - g)| + |(a_{2n_0+1} - g| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Z drugiej strony

$$|a_{2n_0} - a_{2n_0+1}| = |1 - (-1)| = 2,$$

uzyskana sprzeczność dowodzi prawdziwości twierdzenia.

Własności granicy

4. Tw. (O jednoznaczności pojęcia granicy) Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g_1$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g_2$, to $g_1 = g_2$.

Uzasadnienie. Załóżmy nie wprost (a.c.), że $g_1 \neq g_2$. Wybierzmy $0 < \epsilon < \frac{1}{2}|g_1 - g_2|$. Wtedy odcinki $I_1 = (g_1 - \epsilon, g_1 + \epsilon)$ i $I_2 = (g_2 - \epsilon, g_2 + \epsilon)$ są rozłączne. Ponadto z określenia granicy wynika, że istnieją N_1 (w przypadku g_1) i N_2 (w przypadku g_2) takie, że $a_n \in I_1$ dla $n > N_1$ oraz $a_n \in I_2$ dla $n > N_2$. Stąd $a_n \in (I_1 \cap I_2)$ dla $n > N = \max(N_1, N_2)$, co jest niemożliwe, bo $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Uzyskana sprzeczność dowodzi prawdziwości twierdzenia.

5. Tw. (o operacjach arytmetycznych na ciągach zbieżnych). Niech ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ mają granicę właściwą, odpowiednio $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Wtedy

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

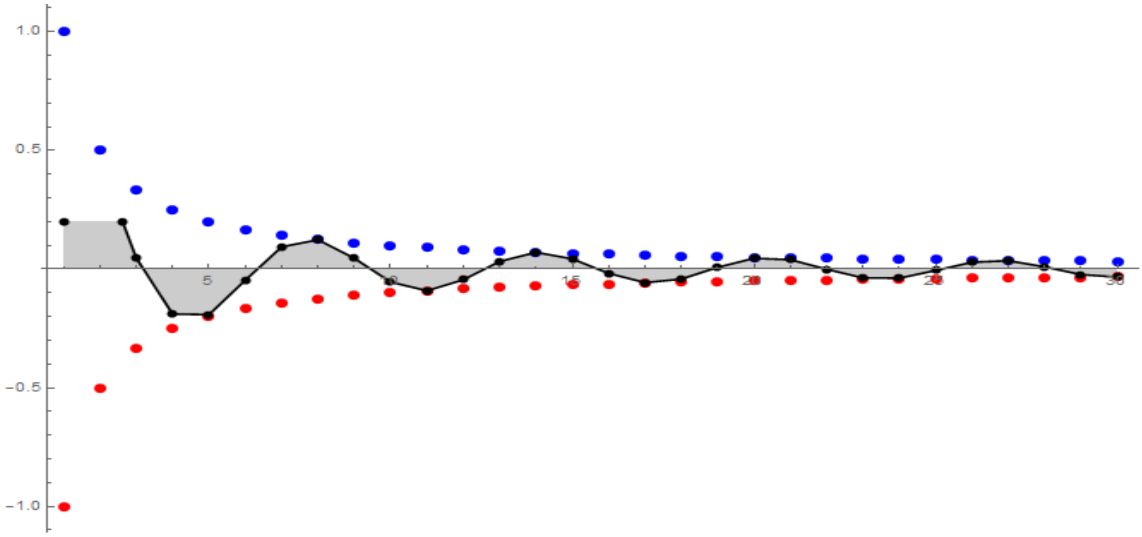
3. jeżeli $b \neq 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^p = \lim\limits_{n\to\infty} a^p$, gdzie $p \in \mathbb{Z}$

5. jeżeli $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = a^{\frac{1}{k}}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$

6. Tw. (o dwóch ciągach) Jeżeli $a_n \leq b_n$ dla $n > n_0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to $a \leq b$.

7. Tw. (O trzech ciągach). Załóżmy, że $(\bigwedge n)\ (a_n \leq b_n \leq c_n)$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$. Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.



8. Tw. Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = 0$.

Uzasadnienie. Z określenia granicy: dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje N takie, że $|b_n - 0| < \epsilon$ dla $n > N$. Ponieważ $|b_n - 0| = |b_n| = ||b_n| - 0|$, wtedy również $||b_n| - 0| < \epsilon$ dla $n > N$, co oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = 0$.

9. Tw. Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony i ciąg $b_n \to 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Uzasadnienie. Ciąg (a_n) jest ograniczony, tzn. istnieje $M > 0$ takie, że $|a_n| \leq M$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$|a_n b_n| \leq M|b_n|$$
$$-M|b_n| \leq a_n b_n \leq M|b_n|$$
$$\lim_{n\to\infty} M|b_n| = M \cdot 0 = 0$$

Ciągi monotoniczne

10. Def. Ciąg (a_n) jest niemalejący, jeśli $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \ldots$

11. Def. Ciąg (a_n) jest rosnący, jeśli $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \ldots$

12. Def. Ciąg (a_n) jest nierosnący, jeśli $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \ldots$

13. Def. Ciąg (a_n) jest malejący, jeśli $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > \ldots$

14. Tw. (o istnieniu granicy ciągu monotonicznego i ograniczonego) Jeżeli

ciąg $\{a_n\}$ jest niemalejący dla $n > n_0$ i ograniczony z góry, to ma granicę. Podobnie, jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest nierosnący dla $n > n_0$ i ograniczony z dołu, to ma granicę.

Ciągi rozbieżne do nieskończoności, granica niewłaściwa

15. Def. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, jeśli $(\bigwedge C)(\bigvee N)(\bigwedge n > N)\ (C < a_n)$

16. Def. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, jeśli $(\bigwedge C)(\bigvee N)(\bigwedge n > N)\ (a_n < C)$

Podciągi

17. Def. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych i niech $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \ldots$ będzie ciągiem liczb naturalnych. Wtedy ciąg $b_k = a_{n_k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ jest podciągiem ciągu (a_n).

18. (Granica podciągu) Tw. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ oraz $n_1 < n_2 < \ldots$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = g$

19. Wniosek. Ciąg, z którego można wybrać dwa podciągi z różnymi granicami (właściwymi lub niewłaściwymi), nie ma granicy.

20. Przykład: a) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n^2+2n}$ - nie istnieje, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{n\pi}{3}$ - nie istnieje.

21. Tw. Jeśli $(\bigwedge n)(a_n \le b_n)$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$

22. Zasady postępowania z nieskończonościami:

1.	$a + \infty = \infty$ dla $-\infty < a \le \infty$	2.	$a \cdot \infty = \infty$ dla $0 < a \le \infty$
3.	$a - \infty = -\infty$ dla $-\infty < a \le \infty$	4.	$a \cdot \infty = -\infty$ dla $-\infty \le a < 0$
5.	$\frac{a}{\infty} = 0$ dla $-\infty < a < \infty$	6.	$\frac{a}{0+} = \infty$ dla $0 < a \le \infty$
7.	$a^\infty = 0$ dla $0+ \le a < 1$	8.	$a^\infty = \infty$ dla $1 < a \le \infty$
9.	$\infty^b = 0$ dla $-\infty \le b < 0$	10.	$\infty^b = \infty$ dla $0 < b \le \infty$

Wyrażenia nieoznaczone

$\infty - \infty$	$0 \cdot \infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	1^∞	∞^0	0^0

Uwaga. Wyrażenia w tabelkach są symbolicznym zapisem odpowiednich

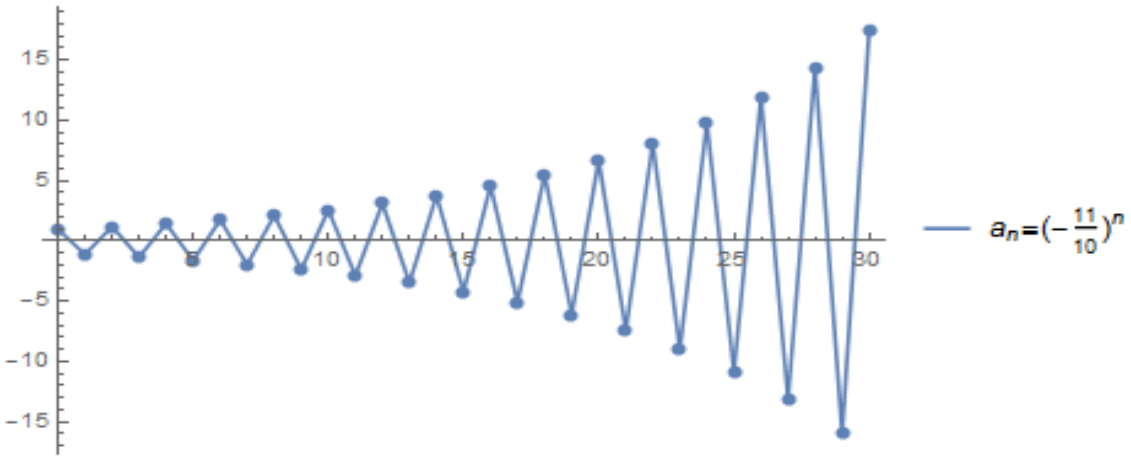
faktów, np.

1. $\frac{a}{0+} = \infty$ oznacza, że w przypadku, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $0 < a \leq \infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, $b_n \geq 0$ dla $n > n_0$, zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

2. zapis $\infty - \infty$ oznacza, że w przypadku, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, to zbieżność ciągu $a_n - b_n$ musi być badana inaczej, niż za pomocą twierdzenia o granicy dwóch ciągów.

23. Przykład. Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie ustaloną liczbą. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & |a| < 1 \\ \text{nie istnieje}, & a \leq -1 \end{cases}$$



24. Tw. Jeśli $1 < a$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Uzasadnienie. Niech $a > 0$ i niech $\sqrt[n]{a} = 1 + x_n$. Wtedy $x_n \geq 0$ i $a = (1+x_n)^n = 1 + \binom{n}{1}x_n + \binom{n}{2}x_n^2 + \cdots + \binom{n}{n}x_n^n \geq 1 + \binom{n}{1}x_n$. Stąd $0 \leq x_n \leq \frac{a-1}{n}$. Z ostatniej nierówności wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Pozostałe przypadki

- przypadek $a = 1$ jest oczywisty
- w przypadku $0 < a < 1$ wystarczy zauważyć, że $\sqrt[n]{a} = 1/\sqrt[n]{1/a}$.

25. Tw. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Uzasadnienie. Niech $\sqrt[n]{n} = 1 + x_n$.
Wtedy $x_n \geq 0$ i $n = (1+x_n)^n = 1 + \binom{n}{1}x_n + \binom{n}{2}x_n^2 + \cdots + \binom{n}{n}x_n^n \geq 1 + \binom{n}{2}x_n^2$.
Stąd $x_n^2 \leq \frac{2}{n}$, co daje $0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$. Z ostatniej nierówności wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

26. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n}$.

$$\sqrt[n]{5^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 5^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 5^n} = 5\sqrt[n]{2}$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n} = 5, \ \lim_{n\to\infty} 5\sqrt[n]{2} = 5$$

Z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n} = 5.$$