Wykład 5. Ciągi liczbowe, cd.

Ciągi i granice

1. Punkty skupienia ciągu $\{a_n\}$, granica dolna i górna ciągu

Definicja. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem ograniczonym. Liczba $s \in \mathbb{R}$ jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$, jeżeli dla każdego $\epsilon > 0$ odcinek $(s-\epsilon, s+\epsilon)$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$.

Najmniejszy taki punkt skupienia jest nazywany **granicą dolną** ciagu $\{a_n\}$, oznaczany jest przez $\liminf a_n$.

Największy punkt skupienia nzywany jest **granicą górną** ciągu $\{a_n\}$, oznaczany jest przez $\limsup a_n$.

Między tymi granicami zachodzi nierówność: $\liminf a_n \leq \limsup a_n$

Przykład 1. Ciąg $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ma dwa punkty skupienia $s_1 = -1$ i $s_2 = 1$. Wtedy

$\liminf a_n = -1, \quad \limsup a_n = 1.$

Przykład 2. Niech ciąg $\{a_n\}$ będzie zbieżny i $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Wtedy g jest jedynym punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$. Więcej prawdziwe jest następujące twierdzenie

Tw. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem ograniczonym. Wtedy ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny, $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, wtedy i tylko wtedy, gdy granice dolna i górna są sobie równe. Wówczas

$$g = \lim_{n\to\infty} a_n = \liminf a_n = \limsup a_n.$$

Uwaga. ∞ jest punktem skupienia ciągu nieograniczonego $\{a_n\}$, jeśli spełniony jest warunek

$$\bigwedge_C \bigwedge_N \bigvee_{n>N} (a_n > C)$$

(inaczej, dla każdego C, przedział (C, ∞) zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu (a_n)).

Podobnie, $-\infty$ jest punktem skupienia ciągu nieograniczonego $\{a_n\}$, jeśli spełniony jest warunek

$$\bigwedge_C \bigwedge_N \bigvee_{n>N} (a_n < C).$$

(inaczej, dla każdego C, przedział $(-\infty, C)$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu (a_n)).

2. Ważne granice ciągów

Liczba e: $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad e = \lim\limits_{n\to\infty} e_n$

Uzasadnienie, że granica istnieje

- ciąg $\{e_n\}$ jest niemalejący, sprawdzenie

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} =$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \overset{a}{\geq}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Uwaga: nierówność $\overset{a}{\geq}$ została otrzymana w wyniku zastosowania nier. Bernoulliego do wyrażenia $\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$.

- ciąg $\{e_n\}$ jest ograniczony:

(1) $$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\frac{(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)\dots n}{n^k} =$$

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

(2) $$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} +$$

$$\dots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot$$

$$\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n}\right) + \dots \leq$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq$$

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 1 + 1 + 1 = 3$$

w przedostaniej nierówności skorzystaliśmy z nierówności $2^{n-1} \leq n!$, $\bigwedge n \geq 1$.

Inne (równoważne) określenie liczby e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$$

Uzasadnienie istnienia granicy powyższej granicy. Przyjmujemy

$$f_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!},$$

- ciąg $\{f_n\}$ jest niemalejący (oczywiste)

- ciąg $\{f_n\}$ jest ograniczony: dowód jak dla e_n (dwie ostatnie nierówności), $f_n \leq 1+1+1=3$

- zachodzi $e_n \leq f_n$, $\bigwedge_n$.

Wniosek: istnieje granica $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ i $e \leq f$

- dla podciągów $\{e_{n^3}\}$ i $\{f_{n+1}\}$ zachodzą nierówności

  $e_{n^3} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n^3}\right)+\ldots+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{n}{n^3}\right)\left(1-\frac{n-1}{n^3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^3}\right)+$
  $\ldots \geq \left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{k!}+\ldots+\frac{1}{(n+1)!}\right)\left(1-\frac{n}{n^3}\right)^n = \left(1-\frac{n}{n^3}\right)^n f_{n+1} =$
  $\left[\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} f_{n+1}$

- przechodząc do granicy otrzymujemy $e = \lim_{n\to\infty} e_{n^3} \geq \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} f_{n+1} = f$

Wniosek: $e \leq f$ i $e \geq f$, stąd $e = f$, co należało udowodnić.

3. Przykłady:

a)	$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty$, gdzie $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$
b)	$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} = \infty$, gdzie $a > 0$
c)	$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$
d)	$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$
e)	$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, $e = 2.731\ldots$ - stała matematyczna
f)	$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, gdzie $\ln(\cdot) = \log_e(\cdot)$
g)	$\lim_{n\to\infty} n\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log_a e$, gdzie $a > 0, a \neq 1$

Uzasadnienie

a) Niech $a = 1+y$, $y > 0$. Wtedy ze wzoru Newtona dla $n > k$ otrzymujemy

$$a^n = (1+y)^n = 1 + \binom{n}{1}y^1 + \binom{n}{2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k+1}y^{k+1} + \cdots + \binom{n}{n}y^n >$$
$$\binom{n}{k+1}y^{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} \cdot y^{k+1} \cdot n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)$$

Stąd

$$\frac{a^n}{n^k} > \frac{1}{(k+1)!} \cdot y^{k+1} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{n^k}$$

Zauważamy, że

$$\lim_n \frac{1}{(k+1)!} \cdot y^{k+1} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{n^k} =$$

$$\underbrace{\frac{1}{(k+1)!} \cdot y^{k+1}}_{=c} \cdot \lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k}{n}\right) n = \infty,$$

stąd wynika żądana granica.

b) Wybieramy n_0 takie, że $2a < n_0$. Wtedy dla $n > n_0$ zachodzi

$$\frac{n!}{a^n} = \frac{n_0!}{a^{n_0}} \cdot \underbrace{\frac{n_0+1}{a} \cdot \frac{n_0+2}{a} \cdot \frac{n_0+3}{a} \cdots \frac{n}{a}}_{n-n_0 \text{ czynników}} \geq \frac{n_0!}{a^{n_0}} \cdot 2^{n-n_0}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_0!}{a^{n_0}} \cdot 2^{n-n_0} = \infty$$

c) Z nierówności

(A) $\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$

dla $0 \leq x \leq \pi/2$ wynika, że

$$0 \leq \sin\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Istnienie i wartość granicy wynikają teraz z twierdzenia o trzech ciągach.

d) z nierówności (A) mamy

$$\cos\frac{1}{n}=\sqrt{1-\sin^2\frac{1}{n}}\leq n\sin\frac{1}{n}\leq 1.$$

Istnienie i wartość granicy wynikają teraz z twierdzenia o trzech ciągach.

e) Pamiętamy, że ciąg $e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ma następujące własności

1. e_n jest niemalejący
2. $1<e_n<e$, $\bigwedge n\in\mathbb{N}$
3. $\lim\limits_n e_n=e$

Zastosujemy metodę nie wprost (a contrario). Zakładamy, że istnieje $\epsilon>0$ takie, że dla nieskończenie wielu n, wyrazy $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln e_n$ leży poza przedziałem $(1-\epsilon,1)$, tzn.

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1-\epsilon,\text{ dla nieskończenie wielu } n\in\mathbb{N}$$

Stąd

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e^{1-\epsilon},\text{ dla nieskończenie wielu } n\in\mathbb{N}$$

Ostatnie stwierdzenie nie może być prawdziwe, bo ciąg $e_n\to e=e^1$. Uzyskana sprzeczność dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

g) Wystarczy zauważyć, że

$$\log_a z=\frac{\ln z}{\ln a}=(\ln z)\cdot(\log_a e)$$

dla $z>0$.

4. Korzystając z definicji granicy właściwej ciągu uzasadnić, że

$$\lim_n\frac{\sqrt{9n^2+1}}{n}=3$$

d-d. Naszym zadaniem jest uzasadnienie, że prawdziwe jest zdanie

$$(3)\quad \bigwedge_{\epsilon>0}\bigvee_{n_0}\bigwedge_{n>n_0}\left|\frac{\sqrt{9n^2+1}}{n}-3\right|<\epsilon$$

Zaczynamy od analizy wyrażenia w (3), tu celem jest znalezienie prostszego wyrażenia szacującego je od góry

$$\left|\frac{\sqrt{9n^2+1}}{n}-3\right| = \left|\frac{\sqrt{9n^2+1}-3n}{n}\right| = \left|\frac{1}{n(\sqrt{9n^2+1}+3n)}\right| =$$
$$\frac{1}{n(\sqrt{9n^2+1}+3n)} \leq \frac{1}{n(3n+3n)} \leq \frac{1}{6n^2}$$

Niech teraz $\epsilon > 0$. Dobieramy liczbę n_0 taką, że

$$\frac{1}{6n_0^2} < \epsilon,$$

np. można wziąć $n_0 = \frac{1}{\sqrt{6\epsilon}} + 1$. Teraz zauważamy, że dla $n > n_0$ zachodzą nierówności

$$\epsilon > \frac{1}{6n_0^2} > \frac{1}{6n^2} > \left|\frac{\sqrt{9n^2+1}}{n}-3\right|,$$

co dowodzi prawdziwości zdania (3).

5. Korzystając z definicji granicy właściwej ciągu uzasadnić, że

$$\lim_n \log_{n+1} 5 = 0$$

d-d. Naszym zadaniem jest uzasadnienie, że prawdziwe jest zdanie

$$(4) \quad \bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} \left|\log_{n+1} 5 - 0\right| < \epsilon$$

Niech teraz $\epsilon > 0$. Przechodzimy do wskazania liczby n_0. Na wstępie zauważamy, że dla $n > n_0$ zachodzi nierówność

$$\log_{n_0+1} 5 > \log_{n+1} 5$$

Stąd przyjmując n_0 takie, że

$$\log_{n_0+1} 5 = \epsilon, \text{ czyli } n_0 = 5^{\frac{1}{\epsilon}} - 1$$

otrzymujemy

$$\epsilon = \log_{n_0+1} 5 > \left|\log_{n+1} 5 - 0\right|.$$

co dowodzi prawdziwości zdania (4).

6. Korzystając z definicji granicy niewłaściwej ciągu uzasadnić, że

$$\lim_n \frac{1}{1-\sqrt[n]{3}} = -\infty.$$

d-d. Naszym zadaniem jest uzasadnienie, że prawdziwe jest zdanie

$$(5) \quad \bigwedge_M \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} M \geq \frac{1}{1-\sqrt[n]{3}}.$$

Wystarczy rozpatrywać $M < 0$ (dlaczego?). Przechodzimy do wskazania liczby n_0. Na wstępie zauważamy, że dla $n > n_0$ zachodzą nierówności

$$\sqrt[n_0]{3} > \sqrt[n]{3} > 1,$$

skąd

$$\frac{1}{1-\sqrt[n]{3}} < \frac{1}{1-\sqrt[n_0]{3}}$$

Dalej przyjmując n_0 takie, że

$$\frac{1}{1-\sqrt[n_0]{3}} < M,$$

czyli

$$\sqrt[n_0]{3} < 1 - \frac{1}{M} = \frac{M-1}{M},$$
$$n_0 > \frac{1}{\log_3 \frac{M-1}{M}}$$

otrzymujemy

$$M > \frac{1}{1-\sqrt[n_0]{3}} > \frac{1}{1-\sqrt[n]{3}}.$$

dla $n > n_0$, co dowodzi prawdziwości zdania (5).

7. Niech $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}$. Udowodnić, że $\lim_n a_n = 1$.
d-d. Określamy pomocnicze ciągi

$$\alpha_n = \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}}, \quad \beta_n = \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+1}}$$

Zauważamy, że

$$\lim_n \alpha_n = \lim_n \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}} = \lim_n \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}} = 1,$$

podobnie $\lim_n \beta_n = 1$

$$\alpha_n = \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}} \leq a_n \leq \beta_n = \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+1}}$$

Teraz wystarczy zastosować twierdzenie o trzech ciągach, skąd otrzymujemy $\lim_n a_n = 1$.

8. Niech $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$. Udowodnić, że $\lim_n a_n = 3$.

d-d. Spostrzeżenie

- ciąg $\{a_n\}$ jest niemalejący.
  Uzasadnienie: $2 = a_1 \leq \sqrt{6+2} = a_2$. Zakładamy, że $a_n \leq a_{n+1}$. Wtedy dla $n+1$ mamy:

  $$a_{n+2} - a_{n+1} = \sqrt{6+a_{n+1}} - \sqrt{6+a_n} =$$
  $$\frac{(\sqrt{6+a_{n+1}} - \sqrt{6+a_n})(\sqrt{6+a_{n+1}} + \sqrt{6+a_n})}{\sqrt{6+a_{n+1}} + \sqrt{6+a_n}} =$$
  $$\frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt{6+a_{n+1}} + \sqrt{6+a_n}} \geq 0$$

  Ostatnia nierówność zachodzi na podstawie założenia indukcyjnego. Teraz z zasady indukcji wynika teza naszego zadania.

- ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony, $2 \leq a_n \leq 3$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

  Uzasadnienie:

  1. $2 = a_1 \leq a_n \bigwedge n$, bo $\{a_n\}$ jest niemalejący

  2. zakładamy, że $a_n \leq 3$, wtedy dla $n+1$ zachodzi $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \leq \sqrt{6+3} = 3$. Na mocy zasady indukcji $a_n \leq 3 \bigwedge n \in \mathbb{N}$

- ponieważ ciąg $\{a_n\}$ jest niemalejący i ograniczony, posiada granicę g

- wyznaczenie g:

  $$g = \lim_n a_{n+1} = \lim_n \sqrt{6 + a_n} = \sqrt{6 + g}$$
  $$g^2 = 6 + g,\ g_1 = -2,\ g_2 = 3$$

  rozwiązanie ujemne odrzucamy, więc $g = 3$