Zagadnienia omawiane na wykładzie w dn. 3-4.11.2026r. :

Twierdzenie 1 *(o granicach niewłaściwych funkcji)*

1.	$p+\infty=\infty$ dla $-\infty<p\leq\infty$	2.	$p\cdot\infty=\infty$ dla $0<p\leq\infty$
3.	$\frac{p}{\infty}=0$ dla $-\infty<p<\infty$	4.	$\frac{p}{0+}=\infty$ dla $0<p\leq\infty$
5.	$p^{\infty}=0$ dla $0+\leq p<1$	6.	$p^{\infty}=\infty$ dla $1<p\leq\infty$
7.	$\infty^{q}=0$ dla $-\infty\leq q<0$	8.	$\infty^{q}=\infty$ dla $0<q\leq\infty$

Uwaga. Równości podane w tabelce są symboliczną formą zapisu twierdzeń o granicy funkcji. Np. równość $p^{\infty}=0$, gdzie $0^{+}\leq p<1$, jest skróconą postacią twierdzenia

$$\left.\begin{array}{ll}(*) & f(x)>0 \text{ dla każdego } x\in S(x_0),\\ (*) & \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=p<1,\\ (*) & \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=0.$$

Przykład 1. Granice podstawowych funkcji

a)	$\lim\limits_{x\to x_0} x^{a}=x_0^{a}$, gdzie $a,x_0>0$
b)	$\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$
c)	$\lim\limits_{x\to x_0} a^{x}=a^{x_0}$, gdzie $a,x_0>0$
d)	$\lim\limits_{x\to x_0}\log_a x=\log_a x_0$, gdzie $a,x_0>0, a\neq 1$
e)	$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$;

Uzasadnienie.

a) Przypadek $x\to x_0+$. Metoda dowodu nie wprost (a contrario). Załóżmy, przeciwnie, że $x^{a}\not\to x_0^{a}$. Wtedy istnieje ciąg (x_n) taki, że $x_n\to x_0+$ i $x_n^{a}\not\to x_0^{a}$, gdy $n\to\infty$. Z drugiego warunku wynika, że istnieje taki $\epsilon>0$, że nieskończenie wiele wyrazów ciągu (x_n^{a}) jest poza przedziałem $(x_0^{a},x_0^{a}+\epsilon)$ inaczej, dla nieskończenie wielu n zachodzi nierówność $x_0^{a}<x_0^{a}+\epsilon\leq x_n^{a}$ lub równoważnie

$$x_0<(x_0^{a}+\epsilon)^{\frac{1}{a}}\leq x_n$$

dla nieskończenie wielu n. Ostatnia nierówność jest sprzeczna z założeniem, że $x_n\to x_0+$. Uzyskana sprzeczność dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

Przypadek $x \to x_0-$, sprowadzamy do rozpatrzonego wyżej zauważając, że wtedy $\frac{1}{x} \to \frac{1}{x_0}+$ i stąd

$$\frac{1}{x^a} = \left(\frac{1}{x}\right)^a \to \left(\frac{1}{x_0}\right)^a = \frac{1}{x_0^a},$$

czyli $x^a \to x_0^a$ również w tym przypadku.

b) Przypadek $x \to 0+$. Wykorzystamy nierówność

$$0 \leq \sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$$

dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Z twierdzenia o trzech funkcjach zastosowanego do nierówności $0 \leq \sin x \leq x$ wynika, że

$$\lim_{x \to 0+} \sin x = 0$$

Przypadek $x \to 0-$ sprowadzamy do wcześniejszego przyjmując $y = -x$. Wtedy $\sin x = -\sin y$ i $y \to 0+$, więc

$$\lim_{x \to 0-} \sin x = -\lim_{y \to 0+} \sin y = 0.$$

Dla $\cos x$ otrzymujemy

$$\lim_{x \to 0+} \cos x = \lim_{x \to 0+} \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1 = \cos 0$$

Ogólny przypadek dla $\sin x$ sprowadzimy do już rozpatrzonego korzystając ze wzoru trygonometrycznago

$$\sin x = \sin[(x - x_0) + x_0] = \sin(x - x_0)\cos x_0 + \sin x_0 \cos(x - x_0)$$

Przyjmując $y = x - x_0$, otrzymujemy

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \cos x_0 \lim_{y \to 0} \sin y + \sin x_0 \lim_{y \to 0} \cos y = \sin x_0,$$

co należało udowodnić.
W przypadku funkcji $\cos x$ skorzystamy ze wzoru $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$.

c) Przypadek $a > 1$, $x \to 0+$. Pamiętamy, że

(1) $$\lim_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Niech $\epsilon > 0$ i $x_n \to 0+$, tzn.

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \;\; x_n > 0$

Wtedy z (1) wynika, że istnieje $n_1 > 0$ takie, że

(3) $1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \epsilon, \text{ dla } n \geq n_1,$

Podobnie z (2) wynika, że istnieje $n_0 > 0$ takie, że

(4) $0 < x_n < \dfrac{1}{n_1}, \text{ dla } n > n_0$

Ponieważ funkcja a^x, $a > 1$ jest niemalejąca dla $x > 0$, z nierówności (3) i (4) wynika, że

$$1 < a^{x_n} < a^{\frac{1}{n_1}} < 1 + \epsilon, \text{ inaczej } |a^{x_n} - 1| < \epsilon \text{ dla } n > \max\{n_0, n_1\},$$

co oznacza, że ciąg $a^{x_n} \to 1$, dowodzi to prawdziwości tej częsci twierdzenia.

W przypadku ogólnym, gdy $x \to x_0+$, zauważamy na wstępie, że $a^x = a^{x_0}a^{x-x_0} = a^{x_0}a^y$, gdzie $y = x - x_0 \to 0+$. Teraz możemy skorzystać z rozpatrzonego już przypadku.

Przypadek $a > 1$, $x \to x_0-$. Zauważamy, że

$$\lim_{x\to x_0-} a^x = \lim_{x\to x_0-} \left(a^{x_0} \cdot \frac{1}{a^{x_0-x}} \right) = a^{x_0} \lim_{y\to 0+} \frac{1}{a^y}$$

Przypadek $0 < a < 1$, $x \to x_0$. Zauważamy, że

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{1}{a}\right)^x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{x_0}} = a^{x_0}$$

d) Przypadek $\lim_{x\to 0+} \ln(1 + x) = 0$. Udowodnimy najpierw nierówność

(5) $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n}, \text{ dla } n \in \mathbb{N}$

Uzasadnienie. Pamiętamy, że ciąg

(6) $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

jest niemalejący i $\lim_{n\to\infty} e_n = e$, stąd

$$1 < e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$$

i po zlogarytmowaniu (funkcja ln jest rosnąca!) otrzymujemy

$$0 < \ln e_n < n \ln(1 + \frac{1}{n}) < 1,$$

Stąd już wynika (5).

Niech $x_n \to 0+$ i niech $\epsilon > 0$. Wtedy istnieją $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$0 < \frac{1}{n_0} < \epsilon$$
$$0 < x_n < \frac{1}{n_0}, \text{ dla } n > n_1$$

Stąd otrzymujemy

$$0 < \ln(1 + x_n) < \ln\left(1 + \frac{1}{n_0}\right) < \frac{1}{n_0} < \epsilon, \text{ dla } n > \max\{n_0, n_1\},$$

co oznacza, że $\lim_{x\to 0+} \ln(1 + x) = 0$.

Przypadek $\lim_{x\to 0-} \ln(1 + x) = 0$. Zauważamy, że

$$\frac{1}{1 + x} = 1 + \frac{-x}{1 + x} = 1 + z, \text{ gdzie } z = \frac{-x}{1 + x}$$

i

$$x \to 0- \ \Rightarrow \ z \to 0+ .$$

W ten sposób

$$\lim_{x\to 0-} \ln(1 + x) = - \lim_{x\to 0-} \ln \frac{1}{1 + x} = - \lim_{z\to 0+} \ln(1 + z) = 0.$$

Przechodzimy do uzasadnienia granic

(7) $\lim_{x\to x_0} \ln x = \ln x_0$

(8) $\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$

Granicę (7) otrzymamy zauważając, że

$$\ln x = \ln x_0 \cdot \frac{x}{x_0} = \ln x_0 + \ln(1+y), \text{ gdzie } y = \frac{x}{x_0} - 1$$
$$\lim_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0 + \lim_{y \to 0} \ln(1+y) = \ln x_0$$

Granicę (8) otrzymamy zuważając, że

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

e) Na początku rozpatrzymy przypadek $x \to 0+$. Zaczniemy od udowodnienia następującego faktu

Fakt 2. Niech m_n będzie ciągiem liczb naturalnych takim, że $\lim_{n \to \infty} m_n = \infty$. Wtedy

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n} = e$$

Uwaga. Podane stwierdzenie nabiera podstawowego znaczenia w sytuacji, gdy ciąg m_n nie jest podciągiem ciągu liczb naturalnych $\{n\}$. W tym drugim przypadku wystarczy powołać się na twierdzenie, że każdy podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do granicy ciągu. Np. w przypadku ciągu $m_n = n^2$ wystarczy powołać się na twierdzenie o granicy podciągu, natomiast w przypadku ciągu $\{m_n\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \dots\}$, który nie jest podciągiem ciągu liczb naturalnych $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ nie możemy się powołać na to twierdzenie.

Mamy wykazać, że zdanie

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n > n_0} \left| \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n} - e \right| < \epsilon$$

jest prawdziwe. Wcześniej był badany ciąg $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, dla którego otrzymaliśmy

1. ciąg e_n jest ograniczony, $1 \leq (1 + \frac{1}{n})^n \leq 3$, $\bigwedge n \in \mathbb{N}$
2. ciąg e_n jest niemalejący, $e_n \leq e_m$, $\bigwedge n \leq m,\ n, m \in \mathbb{N}$
3. $\lim_{n \to \infty} e_n = e$

Niech $\epsilon > 0$. Wtedy istnieje n_1 takie, że dla $n > n_1$ zachodzi

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \epsilon, \ \bigwedge n \geq n_1$$

Ponieważ $m_n \to \infty$, istnieje n_0 takie, że $m_n > n_1$ dla $n > n_0$. Wtedy dla $n > n_0$ otrzymujemy

$$\left(1+\frac{1}{n_1}\right)^{n_1} \leq \left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n} \leq e$$

stąd

$$\left|\left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n} - e\right| \leq \left|\left(1+\frac{1}{n_1}\right)^{n_1} - e\right| < \epsilon, \ \bigwedge n > \max\{n_0, n_1\},$$

co dowodzi prawdziwości naszego faktu.
Przechodzimy do dowodu właściwej granicy. Niech $x_n \to \infty$. Zachodzą nierówności

$$[x_n] \leq x_n \leq [x_n] + 1$$

dla przypomnienia, $[x_n]$ jest częścią całkowitą x. Stąd otrzymujemy oszacowania

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} \leq \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}$$

Dla ciągów skrajnych w tych nierównosciach mamy

$$a_n = \left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} = \left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)}$$

$$b_n = \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1} = \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]} \cdot \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)$$

Do obliczenia granic ciągów a_n i b_n zastosujemy **Fakt 8** otrzymując

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = e$$

Teraz z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

co kończy tę część dowodu.

Przypadek $x \to 0-$ sprowadzimy do już rozpatrzonego. Niech $y = -x$. Wtedy

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1-y)^{-\frac{1}{y}} = \left(\frac{1}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}} = \left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}}$$

Przyjmujemy $z = \frac{y}{1-y}$, $y = \frac{z}{z+1}$, stąd

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left[(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]^{z+1}$$

Teraz wystarczy zauważyć, że jeśli $x \to 0-$, to $z \to 0+$ i skorzystać z granicy funkcji $f(z)^{g(z)}$, gdzie

$$f(z) = (1+z)^{\frac{1}{z}}, \quad g(z) = z+1$$
$$\lim_{z\to 0+} f(z) = e, \quad \lim_{z\to 0+} g(z) = 1$$

Wyrażenia nieoznaczone

$\infty - \infty \quad 0 \cdot \infty \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 1^{\infty} \quad \infty^0 \quad 0^0$

Przykład 2. Granice podstawowych wyrażeń nieoznaczonych

a)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	b)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
c)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc}\sin x}{x} = 1$	d)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$
e)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$	f)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tgh} x}{x} = 1$
g)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	h)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$, gdzie $0 < a \neq 1$
i)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$	j)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$, gdzie $a > 0$
k)	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$	l)	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$
m)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^a-1}{x} = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$		

Uzasadnienie. Wskazówki :

Przykład g). Zauważamy, że

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}} \to e, \text{ gdy } x \to 0$$
$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln y$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y\to e} \ln y = \ln e = 1.$$

Przykład h). Zauważamy, że

$$(1+x) = a^{\log_a(1+x)},$$
$$\ln(1+x) = \ln a \cdot \log_a(1+x)$$
$$\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Przykład i). Przyjmujemy $y = e^x - 1$, $x = \ln(1+y)$ i zauważamy, że

$$\text{jeśli } x \to 0, \text{to } y \to 0$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1$$

Przykład j). Zauważamy, że

$$a^x = e^{x \ln a}$$
$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{e^y - 1}{x} = \frac{e^y - 1}{y} \cdot \ln a, \text{gdzie } y = x \ln a$$

Przykład k). Przyjmujemy $y = \frac{1}{x}$ i zauważamy, że jeśli $x \to \pm\infty$, to $y \to 0$. W końcu

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

Przykład l). Przyjmujemy $y = \frac{a}{x}$. Zauważamy, że

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0} \left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^a = e^a.$$

Przykład m). Przyjmujemy $y = (1+x)^a - 1$ i zauważamy, że

$\ln(1+x) = \frac{1}{a}\ln(1+y)$ oraz jeśli $x \to 0$, to $y \to 0$.

Dalej

$$\frac{(1+x)^a - 1}{x} = \frac{y}{\ln(1+x)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{y}{\ln(1+y)} \cdot a$$

Przykład 3. Korzystając z granic wyrażeń nieoznaczonych obliczyć podane granice:

$a)$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 5x}$ $\quad b)$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 2x}$ $\quad c)$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x}$

$d)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x+7}\right)^{x+1}$ $\quad e)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2-7}\right)^{x^2}$ $\quad f)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{2x-1}$

$g)$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x^3)}{x^3}$ $\quad h)$ $\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x\operatorname{ctg} 5x$ $\quad i)$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{tg}\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

$j)$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{1+x^5}-1}{x}$ $\quad k)$ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[7]{3-x}-1}{\sin \pi x}$ $\quad l)$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\pi-(1-x)^\pi}{x}$

$m)$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}$ $\quad n)$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+\cos x)}{\ln(1+\cos 3x)}$ $\quad o)$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$

Wskazówki.

Przykład a)

$$\frac{\sin 7x}{\sin 5x}=\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{7x}{5x}\quad\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\quad\frac{7}{5}$$

Przykład b)

$$\frac{e^x-1}{\sin 2x}=\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{x}{2x}\quad\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\quad\frac{1}{2}$$

Przykład c)

$$\frac{3^x-2^x}{x}=\frac{e^{x\ln 3}-e^{x\ln 2}}{x}=\left(\frac{e^{x\ln 3}-1}{x\ln 3}\ln 3-\frac{e^{x\ln 2}-1}{x\ln 2}\ln 2\right)$$
$$\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\quad\ln 3-\ln 2.$$

Przykład d)

$$\left(\frac{3x+5}{3x+7}\right)^{x+1}=\frac{1}{\left(\frac{3x+7}{3x+5}\right)^{x+1}}$$
$$\left(\frac{3x+7}{3x+5}\right)^{x+1}=\left(\left(1+\frac{2}{3x+5}\right)^{\frac{3x+5}{2}}\right)^{\frac{2(x+1)}{3x+5}}$$
$$\left(1+\frac{2}{3x+5}\right)^{\frac{3x+5}{2}}\quad\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\quad e,\quad\frac{2(x+1)}{3x+5}\quad\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\quad\frac{2}{3}$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x+7}\right)^{x+1}=\frac{1}{e^{\frac{2}{3}}}=e^{-\frac{2}{3}}.$$

Przykład g)

$$\frac{\ln(1-2x^3)}{x^3} = -2\frac{\ln(1-2x^3)}{-2x^3} \quad \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \quad -2$$

Przykład h)

$$\sin 3x \mathrm{ctg} 5x = \sin 3x \frac{\cos 5x}{\sin 5x} =$$
$$\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{3x}{5x} \cdot \frac{1}{\cos 5x} \quad \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \quad \frac{3}{5}$$

Przykład i)

$$\frac{\mathrm{tg}\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\mathrm{tg}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{\cos\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} \quad \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \quad \infty$$

Przykład j)

$$z = \sqrt[6]{1+x^5} - 1,\ x = \sqrt[5]{(z+1)^6 - 1}, \quad x \to 0 \Longrightarrow z \to 0$$
$$\frac{\sqrt[6]{1+x^5}-1}{x} = \frac{z}{\sqrt[5]{(z+1)^6-1}} =$$
$$= \frac{z}{\sqrt[5]{z^6+6z^5+15z^4+20z^3+15z^2+6z}} \quad \underset{z\to 0}{\longrightarrow} \quad 0$$

Przykład k). Za pomocą kolejnych podstawień $y = 3 - x$ i $y = 1 + z$ doprowadzamy do postaci, gdzie łatwo wyliczymy granicę

$$\frac{\sqrt[7]{3-x}-1}{\sin \pi x} = \frac{\sqrt[7]{y}-1}{\sin \pi(3-y)} =$$
$$\frac{\sqrt[7]{y}-1}{\sin \pi y} = \frac{(1+z)^{\frac{1}{7}}-1}{z} \cdot \frac{z}{-\sin \pi z} = \frac{(1+z)^{\frac{1}{7}}-1}{z} \cdot \frac{\pi z}{\sin \pi z} \cdot \frac{-1}{\pi}$$

Przykład l)

$$\frac{(1+x)^\pi-(1-x)^\pi}{x}=\frac{e^{\pi\ln(1+x)}-e^{\pi\ln(1-x)}}{x}=$$
$$\frac{e^{\pi\ln(1+x)}-1}{\pi\ln(1+x)}\cdot\frac{\pi\ln(1+x)}{x}-\frac{e^{\pi\ln(1-x)}-1}{\pi\ln(1-x)}\cdot\frac{\pi\ln(1-x)}{x}$$
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\pi\ln(1+x)}-1}{\pi\ln(1+x)}:$$
$$z=\pi\ln(x+1),\ x\to0\Longrightarrow z\to0,$$
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\pi\ln(1+x)}-1}{\pi\ln(1+x)}=\lim_{z\to0}\frac{e^z-1}{z}=1$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\pi\ln(1+x)}{x}=\pi$$
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\pi\ln(1-x)}-1}{\pi\ln(1-x)}:$$
$$z=\pi\ln(1-x),\ x\to0\Longrightarrow z\to0,$$
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\pi\ln(1-x)}-1}{\pi\ln(1-x)}=\lim_{z\to0}\frac{e^z-1}{z}=1$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\pi\ln(1-x)}{x}=-\lim_{x\to0}\frac{\pi\ln(1-x)}{-x}=-\pi$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\pi-(1-x)^\pi}{x}=\pi-(-\pi)=2\pi.$$

Przykład o). Zauważamy, że $\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=1-2(1-\cos^2\frac{x}{2})$. Za pomocą kolejnych podstawień $y=2(1-\cos^2\frac{x}{2})=2\sin^2\frac{x}{2}$ i $z=-y$ doprowadzamy do postaci, gdzie łatwo wyliczymy granicę

$$\frac{\ln\cos x}{x^2}=\frac{\ln(1-y)}{-y}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=$$
$$-2\cdot\frac{\ln(1+z)}{z}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x/2}\right)^2$$

Przykład n). Za pomocą kolejnych podstawienia $x=\frac{\pi}{2}+y$ doprowadzamy

do postaci, gdzie łatwo wyliczymy granicę

$$\frac{\ln(1+\cos x)}{\ln(1+\cos 3x)} = \frac{\ln(1-\sin y)}{\ln(1+\sin 3y)} =$$
$$\frac{\ln(1-\sin y)}{-\sin y} \cdot \frac{-\sin y}{\sin 3y} \cdot \frac{\sin 3y}{\ln(1+\sin 3y)} =$$
$$\frac{\ln(1-\sin y)}{-\sin y} \cdot \frac{-\sin y}{y} \cdot \frac{3y}{\sin 3y} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin 3y}{\ln(1+\sin 3y)}$$